

VŠB – Technická univerzita  
Fakulta strojní  
Katedra pružnosti a pevnosti

**Srovnání experimentální, analytické a MKP analýzy křivého  
prutu**

**Comparison of experimental, analytical and FEM analysis  
curved beam**

Autor:

Jan Poláček

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. František Fojtík, Ph.D.

Ostrava 2012

## Zadání bakalářské práce

Student: **Jan Poláček**  
Studijní program: B2341 Strojírenství  
Studijní obor: 3901R003 Aplikovaná mechanika  
Téma: **Srovnání experimentální a MKP analýzy křivého prutu**  
**Comparison of Experimental, Analytical and FEM Analysis Curved Beam**

Zásady pro vypracování:

1. Experimentálně analyzujte daný křivý prut pro stanovené zatížení.
2. Vytvořte MKP model křivého prutu a stanovte okrajové podmínky.
3. Proved'te analytickou a numerickou napět'ově deformační analýzu křivého prutu.
4. Srovnajte vypočtené hodnoty s měřením.

Seznam doporučené odborné literatury:

LENERT, J.: Pružnost a pevnost II, Ostrava, skripta VŠB-TU Ostrava, 1998. 173 s. ISBN 80-7078-572-1.

FUXA, J., ADÁMKOVÁ, L.: Sběrka příkladů z pružnosti a pevnosti II. 2. část, skripta VŠB-TU Ostrava, 2008. 139 s. ISBN 978-80-248-1933-4.

KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, K.: FEM - Principy a praxe metody konečných prvků. Brno: Computer Press, 1997.

LENERT, J.: Úvod do metody konečných prvků. 1. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 1999. 109 s. ISBN 80-7078-686-8.

Ansys Inc. Documentation for ANSYS Release 13.0. SAS IP, Inc., 2011.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. František Fojtík, Ph.D.**

Datum zadání: 16.12.2011

Datum odevzdání: 21.05.2012




doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Farana, CSc.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 21. května 2012

  
.....  
podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě dne 21. 5. 2012

.....  
Poláček

podpis

Jméno a příjmení autora práce: Jan Poláček

Adresa trvalého pobytu autora práce: Slavičkova 11

Ostrava, Moravská Ostrava

## **ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

POLÁČEK, J. Srovnání experimentální, analytické a MKP analýzy křivého prutu: bakalářská práce. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2012, 43 s. Vedoucí práce: František Fojtík

Bakalářská práce se zabývá analytickým řešením prutu pomocí teorie slabě a silně zakřivených křivých prutů. Numerickým řešením metodou konečných prvků v programu ANSYS 12.1 s využitím třech různých typů prvků. A experimentálním měřením, se kterým byly všechny výsledky, dosažené analyticky i numericky, srovnány.

## **ANNOTATION OF THESIS**

POLÁČEK, J. Comparison of experimental, analytical and FEM analysis curved beam: Bachelor Thesis. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics of Materials, 2012, 43 p. Thesis head: Fojtík, F.

The bachelor thesis deal with analytic solution of beam by theory of thin and thick curved beams. Numerical solution by Finite Element Method in program ANSYS 12.1 with using three different types of elements. Results which were achieved by analytical and numerical solution were compared with experimental measuring.

## OBSAH

SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ.....	1
1 Úvod.....	3
2 Teorie křivých prutů .....	4
2.1 Tenké křivé pruty .....	5
2.1.1 Potřebné vztahy pro určení napětí .....	5
2.2 Tlusté křivé pruty .....	5
2.2.1 Potřebné vztahy pro určení napětí .....	6
2.3 Průhyb křivých prutů.....	7
2.3.1 Deformační energie.....	7
2.3.2 Castiglianova věta.....	7
3 Analytické řešení křivého prutu.....	9
3.1 Tenký křivý prut.....	11
3.2 Tlustý křivý prut.....	13
3.3 Shrnutí dosažených výsledků z analytického řešení .....	16
4 Experimentální měření.....	17
4.1 Příprava měřicího obvodu .....	17
4.2 Použitá zařízení .....	19
4.3 Postup měření.....	20
4.4 Výpočet napětí z naměřených deformací .....	20
4.5 Výsledky měření a výpočtů.....	21
4.6 Shrnutí dosažených výsledků z experimentálního měření .....	24
5 Numerické řešení .....	25
5.1 MKP model vytvořený pomocí prvku typu Beam .....	25
5.2 MKP model vytvořený pomocí prvku typu Solid .....	29
5.3 MKP model vytvořený pomocí prvku typu Shell .....	33
5.4 Shrnutí dosažených výsledků z numerického řešení.....	37
6 Srovnání MKP a analytického výpočtu pro model případu prutu .....	38
6.1 Vypočtené hodnoty (analytickou a MKP metodou): .....	39
6.2 Shrnutí dosažených výsledků.....	39
7 Závěr .....	40
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY .....	42
SEZNAM PŘÍLOH .....	43

## SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ

Symbol	Význam	Jednotka
$\Delta\sigma$	Odchylka napětí	[MPa]
A	Přetvárná práce vnějších sil	[J]
B	Šířka příčného řezu	[mm]
d	Průměr kruhového průřezu	[mm]
dl	Elementární délka	[mm]
dS	Elementární plocha	[mm <sup>2</sup> ]
dφ	Elementární úhel	[rad]
e	Posunutí neutrální osy vůči hlavní centrální ose	[mm]
E	Modul pružnosti v tahu	[MPa]
F	Síla	[N]
G	Modul pružnosti ve smyku	[MPa]
h	Výška profilu	[mm]
J	Osový moment setrvačnosti plochy příčného řezu	[mm <sup>4</sup> ]
k	k-faktor	[-]
M <sub>k</sub>	Krouticí moment	[N·m]
M <sub>o</sub>	Ohybový moment	[N·m]
N	Normálová síla	[N]
R	Poloměr zakřivení střednice	[mm]
r	Poloměr kruhového průřezu	[mm]
R <sub>0</sub>	Poloměr zakřivení neutrální osy	[mm]
R <sub>0y</sub>	Poloměr křivosti os, procházející těžištěm	[mm]
R <sub>Ny</sub>	Poloměr křivosti os, procházející neutrální osou	[mm]
S	Plocha průřezu	[mm <sup>2</sup> ]
T	Posouvající síla	[N]
U	Deformační energie	[J]
U <sub>y</sub>	Statický moment plochy k dané ose	[mm <sup>3</sup> ]
v <sub>F</sub>	Posuv pod silou F	[mm]
v <sub>FP</sub>	Příspěvek k průhybu z přímé části	[mm]
v <sub>FZ</sub>	Příspěvek k průhybu ze zakřivené části	[mm]
W	Potencionální energie napjatosti	[J]
W <sub>b</sub>	Potencionální energie napjatosti s příspěvkem energie	[J]
w <sub>i</sub>	Posuv	[mm]
x	Označení směru souřadnice	[mm]
y	Označení směru souřadnice	[mm]
y*	Vzdálenost bodu od neutrální osy	[mm]
z	Označení směru souřadnice	[mm]
β	Součinitel nerovnoměrnosti rozložení smykového napětí	[-]

Symbol	Význam	Jednotka
$\varepsilon_1$	Poměrné deformace v podélném směru	[-]
$\varepsilon_2$	Poměrné deformace v příčném směru	[-]
$\mu$	Poissonova konstanta	[-]
$\rho$	Poloměr křivosti libovolného vlákna	[mm]
$\sigma_1$	Napětí v podélném směru ( $\sigma_{po}$ )	[MPa]
$\sigma_2$	Napětí v příčném směru ( $\sigma_{př}$ )	[MPa]
$\sigma_c$	Celkové napětí v daném bodě	[MPa]
$\sigma_M$	Napětí od momentové složky	[MPa]
$\sigma_N$	Normálové napětí	[MPa]
$\sigma_p$	Napětí vycházející ze vztahů pro přímé pruty	[MPa]
$\sigma_z$	Napětí vycházející ze vztahů pro zakřivené pruty	[MPa]
$\tau$	Smykové napětí	[MPa]
$\varphi_i$	Úhel natočení	[rad]



# 1 Úvod

U prutu, nalézajícího se v laboratoři uvnitř areálu VŠB–TUO, jsme proměřili geometrii a podrobili jej zátěži. Experimentální měření bylo prováděno za pomoci elektrických odporových fóliových tenzometrů. Velikost zatěžující síly a průhybu byla změřena snímačem síly a snímačem polohy. Díky znalosti geometrických rozměrů, zátěže (tedy síly) a průhybu, určené experimentálním měřením, můžeme daný prut dále analyzovat analyticky i numericky.

Analytické řešení daného prutu je možno provést pomocí teorie slabě zakřivených (tenkých) a silně zakřivených (tlustých) křivých prutů.

Numerické řešení provedeme metodou konečných prvků. Řešení pomocí metody konečných prvků je dnes nejrozšířenější metodou analýzy poddajných těles. Toto řešení umožňuje hned vícero programů jako je např. ANSYS, MSC Nastran/Patran, Marc a další. Námi zvolený (použitý) je první uvedený, tedy program ANSYS verze 12.1.

Výsledky získané analytickou, experimentální i numerickou metodou budou následně porovnány.

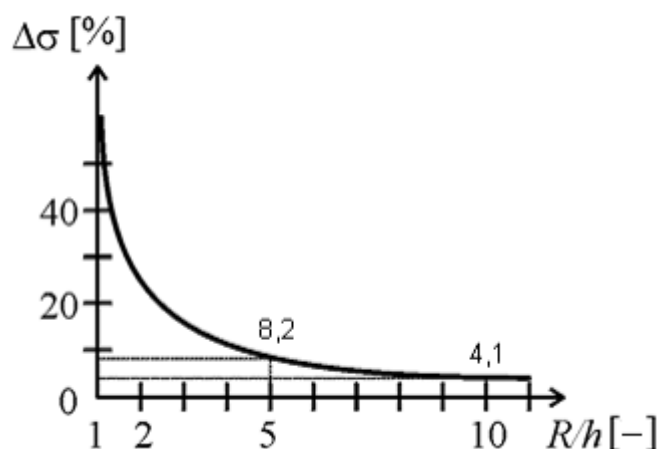
## 2 Teorie křivých prutů

Křivý prut je jednoznačně definován tvarem střednice<sup>1</sup> prutu a tvarem průřezu v každém bodě střednice. Střednice je hladká, spojitá křivka. Prutem můžeme nazvat součást, u níž převládá délka nad rozměry příčného řezu. Je-li tvar příčného řezu stejný podél délky součásti, jedná se o tzv. prizmatický prut. Střednice může být rovinná nebo prostorová křivka, podle toho dělíme pruty na rovinné či prostorové.

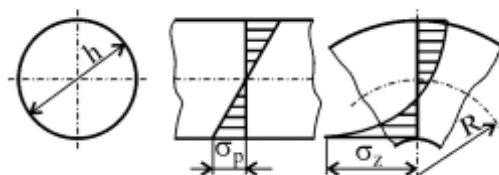
Dále dělíme křivé pruty na tenké (slabě zakřivené) a tlusté (silně zakřivené). Kritériem, udávající zda se jedná o tenký nebo tlustý křivý prut, je poměr mezi poloměrem zakřivení střednice  $R$  a výškou profilu  $h$  v rovině střednice.

Pro porovnání výpočtu průběhu napětí při použití vztahů pro pruty zakřivené  $\sigma_z$  a pro pruty přímé  $\sigma_p$  platí vztah pro  $\Delta\sigma$  v závislosti na poměru  $R/h$  [1], kde:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_z - \sigma_p}{\sigma_z} \cdot 100[\%]. \quad (2.0)$$



Obr. 2. 1 – Graf přesnosti výpočtu



Obr. 2. 2 – Průběhy napětí

Graf závislosti poměru  $R/h$  na odchylce napětí  $\sigma_p$  od  $\sigma_z$ :

Z grafu (Obr. 2. 1) můžeme vyčíst, že při větších poměrech  $R/h \geq 5$  se dopouštíme relativně malé chyby (8,2% pro poměr  $R/h = 5$ ), čehož je využito u teorie slabě zakřivených prutů. Avšak, čím je poměr  $R/h$  menší, tím se dopouštíme větší chyby při výpočtu dle teorie přímých prutů. Proto se při poměrech  $R/h < 5$  využívá vztahů pro zakřivené pruty.

<sup>1</sup> Střednice je spojnice všech těžišť příčných řezů.

## 2.1 Tenké křivé pruty

Výpočet dle teorie slabě zakřivených prutů můžeme použít v případě, že je výše zmíněný poměr  $R/h \geq 5$ . Předpokládáme zde, že neutrální osa prochází těžištěm příčného řezu a napětí jsou úměrná vzdálenosti od neutrální osy. Posuvy jednotlivých bodů stanovíme dle rovnic rovnováhy. [2]

### 2.1.1 Potřebné vztahy pro určení napětí

Rovnice rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad (2.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad (2.2)$$

$$\sum M_i = 0. \quad (2.3)$$

Normálové napětí od normálové síly:

$$\sigma_N = \pm \frac{N}{S}. \quad (2.4)$$

Smyková napětí od posouvajících sil:

$$\tau_{T_y} \equiv \tau_{xy} = \frac{T_y U_{(y)}}{J_z B_{(y)}}, \quad (2.5)$$

$$\tau_{T_z} \equiv \tau_{xz} = \frac{T_z U_{(z)}}{J_y B_{(z)}}. \quad (2.6)$$

Smykové napětí od krouticího momentu:

$$\tau_{M_k} = \frac{M_k}{J_p} \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (2.7)$$

Normálová napětí od ohybových momentů:

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{J_y} z, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z}{J_z} y. \quad (2.9)$$

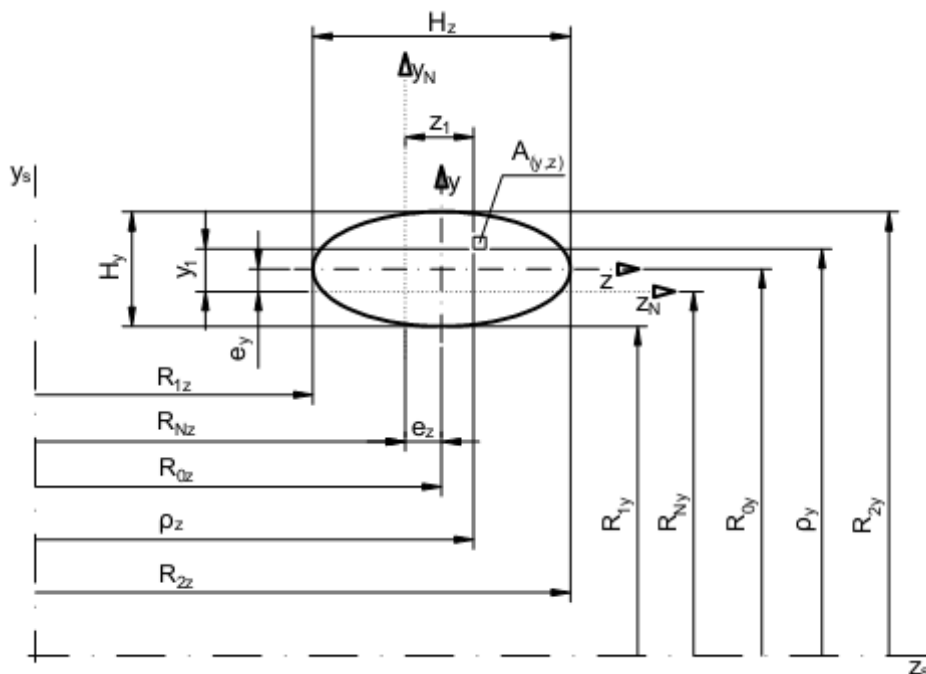
## 2.2 Tlusté křivé pruty

O silně zakřivený prut se jedná v případě, že poměr  $R/h < 5$ . Vzorce pro silně zakřivené pruty byly odvozeny za předpokladu zachování rovinnosti a symetrie příčných průřezů v procesu zatěžování a existence prutové napjatosti. Tělesa lze řešit jako silně zakřivené pruty jen do poměru  $R/h$  řádově rovného jedné. Na rozdíl od tenkých křivých prutů je neutrální osa

posunuta o hodnotu  $e$  vůči hlavním centrálním osám<sup>2</sup>  $y, z$ , vždy ke středu křivosti střednice prutu (Obr. 2. 3.). Napětí od momentové složky ( $M_y, M_z$ ) se mění nelineárně (hyperbolicky).

### 2.2.1 Potřebné vztahy pro určení napětí

Pro tlusté křivé pruty platí taktéž vztahy (2.1) až (2.7).



Obr. 2. 3 - Příčný průřez křivým prutem

Napětí od ohybových momentů:

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y \cdot z_1}{e_z \cdot S \cdot \rho_z}, \quad (2.10)$$

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z \cdot y_1}{e_y \cdot S \cdot \rho_y}. \quad (2.11)$$

Tyto dvě rovnice platí jen v případech, že příslušná hlavní centrální osa je současně osou symetrie plochy příčného řezu.

Posunutí neutrální osy:

$$e_y = R_{0y} - R_{Ny}, \quad (2.12)$$

$$e_z = R_{0z} - R_{Nz}. \quad (2.13)$$

<sup>2</sup> Těžištěm plochy příčného řezu prochází nekonečně mnoho centrálních os. Pro obecný tvar takovéto plochy existuje jediná, k níž je osový moment setrvačnosti této plochy minimální a jediná, ke které je moment setrvačnosti maximální. Tyto dvě osy nazýváme *hlavní centrální osy* (příčného řezu) a jsou na sebe navzájem kolmé.

Poloměr křivosti neutrální osy:

$$R_{N_y} = \frac{S}{\int_{(S)} \frac{dS}{\rho_y}}, \quad (2.14)$$

$$R_{N_z} = \frac{S}{\int_{(S)} \frac{dS}{\rho_z}}. \quad (2.15)$$

## 2.3 Průhyb křivých prutů

### 2.3.1 Deformační energie

Těleso podrobené účinkům vnějších sil se deformuje. Za předpokladu pružných deformací konají tyto síly přetvárnou práci, která se změní v deformační energii tělesa. Je to vlastně potenciální energie, která se může opět změnit v práci, přestanou-li vnější síly na těleso působit.

Zvětšují-li se vnější síly nenáhle, lze ztráty kinetickou energií, případně ztráty teplem zanedbat a lze psát, že přetvárná práce vnějších sil  $A$  je rovna deformační energii tělesa  $U$  (někdy též označováno  $W$ ). [5]

$$U = A \quad (2.16)$$

### 2.3.2 Castiglianova věta

Působí-li na těleso rovnovážná soustava sil, za předpokladu platnosti Hookeova zákona a zákona superpozice, můžeme použít Castiglianovu větu. Tu lze vyjádřit slovně takto:

*Parciální derivace deformační energie tělesa, vyjádřena jako funkce vnějších sil, podle libovolné síly, je rovna složce posuvu působíště této síly v jejím směru.* [5]

Matematické vyjádření pro posuv:

$$w_i = \frac{\partial A}{\partial F_i}, \quad (2.17)$$

obdobně pro úhel natočení platí:

$$\varphi_i = \frac{\partial A}{\partial M_j}. \quad (2.18)$$

S využitím Castiglianovy věty tedy můžeme psát pro zjištění průhybu křivého prutu následující rovnice [2]:

$$\Delta_{N_i} = \frac{\partial W}{\partial N_i} = 0, \quad (2.19)$$

$$\Delta_{T_i} = \frac{\partial W}{\partial T_i} = 0, \quad (2.20)$$

$$\Delta\varphi_{M_i} = \frac{\partial W}{\partial M_i} = 0. \quad (2.21)$$

Kde potenciální energie napjatosti  $W$  je pro tenký křivý prut:

$$W = \frac{1}{2EJ} \int_{(l)} M_{(l)}^2 dl + \frac{1}{2ES} \int_{(l)} N_{(l)}^2 dl + \frac{\beta}{2GS} \int_{(l)} T_{(x)}^2 dl, \quad (2.22)$$

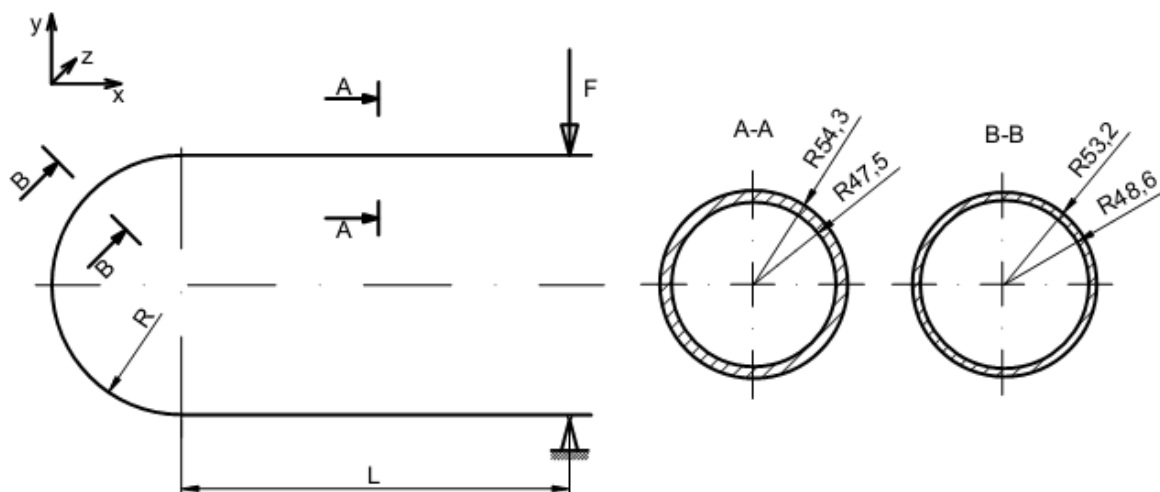
a pro tlustý křivý prut:

$$W_b = \frac{1}{2EeSR} \int_{(l)} M_{(l)}^2 dl + \frac{1}{2ES} \int_{(l)} N_{(l)}^2 dl + \frac{\beta}{2GS} \int_{(l)} T_{(l)}^2 dl + \frac{1}{ESR} \int_{(l)} M_{(l)} N_{(l)} dl. \quad (2.23)$$

Jednotlivé členy u tenkého i tlustého křivého prutu odpovídají jednotlivým potenciálním energiím deformace od ohybového momentu, normálové a tečné síly. U tlustého křivého prutu je navíc ještě potenciální energie deformace ohybového momentu, který se pootočí o úhel natočení řezu. Obvykle nemusíme počítat všechny příspěvky k potenciální energii napjatosti  $W_b$ , energie od ohybového momentu bývá zpravidla podstatně vyšší než energie např. od posouvající síly  $T$ .

### 3 Analytické řešení křivého prutu

Geometrie prutu je dána viz Obr. 3. 1, dle výkresu Příloha A. Celková délka přímého úseku je 474mm, ale zatížení bylo aplikováno 25mm od volného konce přímé části. Předpokládáme, že zadaná součást je křivý prut. Budeme ho tedy vyšetřovat nejdříve jako tenký křivý prut a poté jako tlustý křivý prut. Pro oba tyto případy můžeme použít následující vztahy.



Obr. 3. 1 – Schéma prutu

Zadáno:

Materiál:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0,3$$

Geometrie:

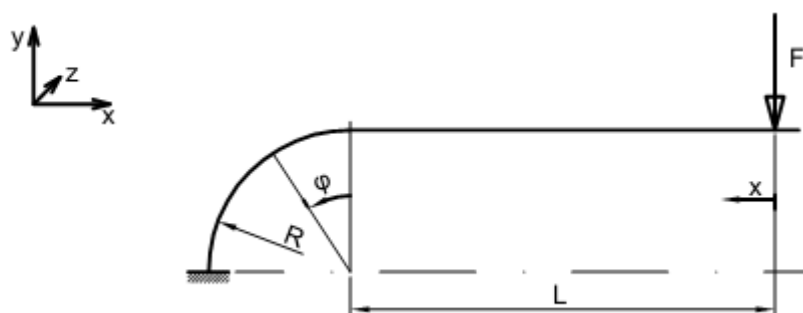
$$R = 150 \text{ mm}$$

$$L = 449 \text{ mm}$$

Zatížení:

$$F = 1671,5 \text{ N}$$

Využijeme osy symetrie, kterou tato součást nabízí, a můžeme náš případ zakreslit takto (Obr. 3. 2):



Obr. 3. 2 – Řešená část

Geometrie prutu je popsána dvěma nezávislými proměnnými  $x$ ,  $\varphi$ :

Pro přímý úsek

$$x \in \langle 0; L \rangle$$

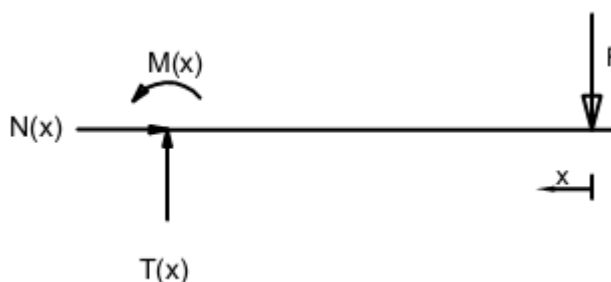
Pro zakřivený úsek

$$\varphi \in \langle 0; \pi/2 \rangle$$

(3.1)

Stanovení rovnic rovnováhy:

- Přímý úsek



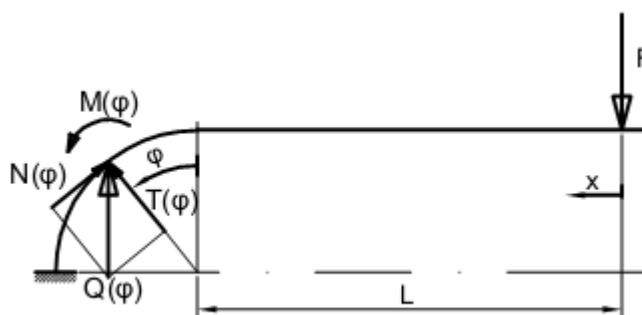
Obr. 3. 3 – Přímý úsek

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow N_{(x)} = 0, \quad (3.2)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow F - T_{(x)} = 0 \rightarrow T_{(x)} = F, \quad (3.3)$$

$$\sum M_i = 0 \rightarrow M_{(x)} - F \cdot x = 0 \rightarrow M_{(x)} = F \cdot x. \quad (3.4)$$

- Zakřivený úsek



Obr. 3. 4 – Zakřivený úsek

$$\sum F_{ix} - N_{(\varphi)} = 0 \rightarrow F \cdot \sin \varphi - N_{(\varphi)} = 0 \rightarrow N_{(\varphi)} = F \cdot \sin \varphi, \quad (3.5)$$

$$\sum F_{iy} - T_{(\varphi)} = 0 \rightarrow F \cdot \cos \varphi - T_{(\varphi)} = 0 \rightarrow T_{(\varphi)} = F \cdot \cos \varphi, \quad (3.6)$$

$$\sum M_i - M_{(\varphi)} = 0 \rightarrow F \cdot (L + R \cdot \sin \varphi) - M_{(\varphi)} = 0 \rightarrow M_{(\varphi)} = F \cdot (L + R \cdot \sin \varphi). \quad (3.7)$$

Pro přehlednost si zde vypíšeme důležité rozměry a vztahy. Vyšetřovaný průřez v zakřivené části:

$$d_2 = 106,4\text{mm}$$

$$\sin(\pi/2) = 1$$

$$d_1 = 97,2\text{mm}$$

$$\cos(\pi/2) = 0$$

plocha S je tedy:

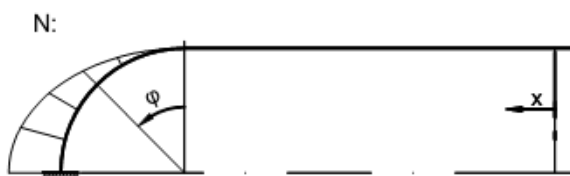
$$S = \frac{\pi \cdot (d_2^2 - d_1^2)}{4} = \frac{\pi \cdot (106,4^2 - 97,2^2)}{4} = 1471\text{mm}^2 \quad (3.8)$$



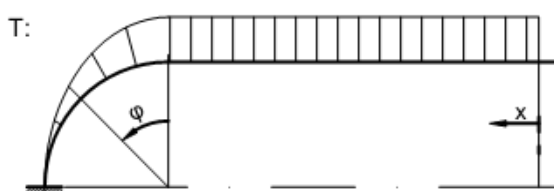
a osový moment setrvačnosti  $J$  plochy  $S$ :

$$J = \frac{\pi \cdot (d_2^4 - d_1^4)}{64} = \frac{\pi \cdot (106,4^4 - 97,2^4)}{64} = 1909619,8 \text{ mm}^4 \doteq 1,91 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (3.9)$$

Průběh normálové síly  $N$  zobrazen na Obr. 3. 5, tečné síly  $T$  zobrazen na Obr. 3. 6 a ohybového momentu  $M$  v závislosti na poloze vyšetřovaného řezu zobrazen na Obr. 3. 7.



Obr. 3. 5 - Průběh normálové síly



Obr. 3. 6 - Průběh tečné síly



Obr. 3. 7 – Průběh ohybového momentu

Napětí od normálové síly:

$$\sigma_N = -\frac{N}{S} = -\frac{F \cdot \sin \varphi}{S} = -\frac{1671,5}{1471} = -1,136 \text{ MPa} \quad (3.10)$$

### 3.1 Tenký křivý prut

Napětí od ohybového momentu v zakřivené části:

$$y \in \left\langle -\frac{d_2}{2}; \frac{d_2}{2} \right\rangle$$

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{F(L+R)}{J_z} y = \frac{F(L+R)}{J_z} \pm \frac{d_2}{2} = \frac{1671,5(449+150)}{1909619,8} \pm \frac{106,4}{2} \quad (3.11)$$

Maximální napětí:

Ve vyšetřovaném místě bude po dosazení do (3.6) tečná složka rovna nule, proto nám postačí pouze sečíst normálová napětí.

$$\sigma_C = \sigma_N + \sigma_{M_z} = -\frac{N}{S} + \frac{F(L+R)}{J_z} y \quad (3.12)$$

Pro  $y = r_2 = 53,2\text{mm}$

$$\sigma_C = -1,136 + 27,893 = 26,757\text{MPa} \quad (3.13)$$

Pro  $y = -r_2 = -53,2\text{mm}$

$$\sigma_C = -1,136 - 27,893 = -29,029\text{MPa} \quad (3.14)$$

Výpočet posuvu pod silou F:

Celkový průhyb pod silou F spočteme jako součet průhybu přímé a zakřivené části. Jelikož byla použita symetrie, spočetli bychom podle vzorce (2.22) pouze průhyb této poloviny, celková deformační energie musí být tedy dvakrát větší pro průhyb celé součásti.

$$v_F = v_{FP} + v_{FZ}. \quad (3.15)$$

Kde  $v_{FP}$  ...příspěvek k průhybu z přímé části

$v_{FZ}$  ...příspěvek k průhybu ze zakřivené části

Součinitel  $\beta = 2$  [2]

Přepočet modulu pružnosti v tahu na modul pružnosti ve smyku:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (3.16)$$

a) Přímá část

$$\begin{aligned} v_{FP} &= 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial F} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial F} \left[ \int_0^L \frac{M_{(x)}^2}{2 \cdot E \cdot J} dx + \int_0^L \frac{\beta \cdot T_{(x)}^2}{2 \cdot G \cdot S} dx \right] = \\ &= 2 \cdot \left[ \int_0^L \frac{2 \cdot F \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J} dx + \int_0^L \frac{2 \cdot \beta \cdot F}{2 \cdot G \cdot S} dx \right] = \frac{2}{E \cdot J} \int_0^L F \cdot x^2 dx + \frac{2 \cdot \beta}{G \cdot S} \int_0^L F dx = \\ &= \frac{2 \cdot F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J} + \frac{2 \cdot \beta \cdot F \cdot L}{G \cdot S} = \frac{2 \cdot F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J} + \frac{4 \cdot \beta \cdot F \cdot L \cdot (1 + \mu)}{E \cdot S} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} v_{FP} &= \frac{2 \cdot F \cdot L}{E} \left[ \frac{L^2}{3 \cdot J} + \frac{2 \cdot \beta \cdot (1 + \mu)}{S} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot 1671,5 \cdot 449}{2,1 \cdot 10^5} \left[ \frac{449^2}{3 \cdot 1,91 \cdot 10^6} + \frac{2 \cdot 2 \cdot (1 + 0,3)}{1471} \right] = 0,187\text{mm} \end{aligned}$$

Normálová složka potenciální energie  $W_N$  je rovna nule. Vyplývá to ze vztahu (3.2).

b) Zakřivená část

$$\begin{aligned} v_{FZ} &= 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial F} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial F} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{(\varphi)}^2}{2 \cdot E \cdot J} R \cdot d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta \cdot T_{(\varphi)}^2}{2 \cdot G \cdot S} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_{(\varphi)}^2}{2 \cdot E \cdot S} R \cdot d\varphi \right] = \\ &= \frac{2}{E \cdot J} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot (L + R \cdot \sin \varphi)^2 R \cdot d\varphi + \frac{2 \cdot \beta}{G \cdot S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot \cos^2 \varphi \cdot R \cdot d\varphi \\ &\quad + \frac{2}{E \cdot S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot \sin^2 \varphi \cdot R \cdot d\varphi = \frac{F \cdot L^2 \cdot R \cdot \pi}{E \cdot J} + \frac{2 \cdot \beta \cdot F \cdot R \cdot \pi}{G \cdot S \cdot 4} + \frac{F \cdot R \cdot \pi}{2 \cdot E \cdot S} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$v_{FZ} = \frac{F \cdot R \cdot \pi}{E} \left[ \frac{L^2}{J} + \frac{\beta \cdot (1 + \mu)}{S} + \frac{1}{2 \cdot S} \right] =$$

$$= \frac{1671,5 \cdot 150 \cdot \pi}{2,1 \cdot 10^5} \left[ \frac{449^2}{1,91 \cdot 10^6} + \frac{2 \cdot (1 + 0,3)}{1471} + \frac{1}{2 \cdot 1471} \right] = 0,404 \text{ mm}$$

Jednotlivé integrály řeším následovně:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot (L + R \cdot \sin \varphi)^2 R \cdot d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot (L^2 + 2L \cdot R \cdot \sin \varphi + R^2 \cdot \sin^2 \varphi) R \cdot d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot L^2 R \cdot d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot 2L \cdot R \cdot \sin \varphi R \cdot d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot R^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot R \cdot d\varphi =$$

$$(3.19)^3$$

$$= F \cdot L^2 \cdot R \cdot [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} + F \cdot 2L \cdot R^2 \cdot [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} + F \cdot R^3 \cdot \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{F \cdot L^2 \cdot R \cdot \pi}{2} + 2 \cdot F \cdot L \cdot R^2 + \frac{F \cdot R^3 \cdot \pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot \cos^2 \varphi \cdot R \cdot d\varphi = F \cdot R \cdot \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{F \cdot R \cdot \pi}{4} \quad (3.20)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot \sin^2 \varphi \cdot R \cdot d\varphi = F \cdot R \cdot \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{F \cdot R \cdot \pi}{4} \quad (3.21)$$

Celkový průhyb je tedy:

$$v_F = v_{FP} + v_{FZ} = 0,187 + 0,405 = 0,591 \text{ mm} \quad (3.22)$$

Výsledky výpočtů budou přehledně vypsány na konci kapitoly, jak pro tenký, tak pro tlustý křivý prut.

### 3.2 Tlustý křivý prut

Poloměr zakřivení neutrální osy [2]:

$$R_0 = \frac{S}{\int_{(S)} \frac{dS}{\rho}} = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4 \cdot \left( \sqrt{4 \cdot R^2 - d_1^2} - \sqrt{4 \cdot R^2 - d_2^2} \right)} =$$

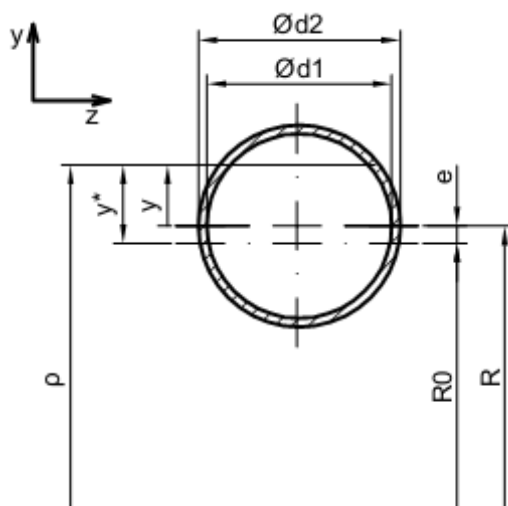
$$(3.23)$$

$$= \frac{106,4^2 - 97,2^2}{4 \cdot \left( \sqrt{4 \cdot 150^2 - 97,2^2} - \sqrt{4 \cdot 150^2 - 106,4^2} \right)} = 141,079 \text{ mm}$$

---

<sup>3</sup> Matematické intermezzo:  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$   
 $\int \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$ ; obdobně  $\int \cos^2 x = \frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}$

Napětí od ohybového momentu v zakřivené části:



Obr. 3. 8 – Schéma pro výpočet

Excentricita:

$$e = R - R_0 = 150 - 141,079 = 8,921\text{mm} \quad (3.24)$$

Vzdálenost bodu od neutrální osy:

$$y^* = e + y \quad (3.25)$$

$$\text{Kde } y \in \left\langle -\frac{d_2}{2}; \frac{d_2}{2} \right\rangle$$

Poloměr křivosti vlákna, v němž počítáme napětí:

$$\rho = R + y \quad (3.26)$$

Po dosazení (3.7), (3.8), (3.25), (3.26) do (2.11) dostaneme:

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z \cdot y^*}{e \cdot S \cdot \rho} = \frac{F \cdot (L + R) \cdot (e + y)}{e \cdot S \cdot (R + y)} \quad (3.27)$$

Maximální napětí:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_z} = -\frac{N}{S} + \frac{F \cdot (L + R) \cdot (e + y)}{e \cdot S \cdot (R + y)} \quad (3.28)$$

Pro  $y = r_2 = 53,2\text{mm}$  a dosazením do (3.27):

$$\sigma_{M_z} = \frac{1671,5 \cdot (449 + 150) \cdot (8,921 + 53,2)}{8,921 \cdot 1471 \cdot (150 + 53,2)} = 23,322\text{MPa} \quad (3.29)$$

a po dosazení (3.10) a (3.29) do (3.28):

$$\sigma_C = -1,136 + 23,322 = 22,186\text{MPa} \quad (3.30)$$

Pro  $y = -r_2 = -53,2\text{mm}$  a dosazením do (3.27):

$$\sigma_{M_z} = \frac{1671,5 \cdot (449 + 150) \cdot (8,921 - 53,2)}{8,921 \cdot 1471 \cdot (150 - 53,2)} = -34,895\text{MPa} \quad (3.31)$$

a po dosazení (3.10) a (3.31) do (3.28):

$$\sigma_C = -1,136 - 34,895 = -36,031\text{MPa} \quad (3.32)$$

### Výpočet posuvu pod silou F:

Výpočet provedeme obdobně jako u tenkého křivého prutu, opět musíme uvažovat dvojnásobek potenciální energie pro vyjádření skutečné deformace (celkového posuvu). S využitím vztahu (2.23) a (3.15) pro výpočet celkového posuvu můžeme psát:

a) Přímá část

$$\begin{aligned} v_{FP} &= 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial F} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial F} \left[ \int_0^L \frac{M_{(x)}^2}{2 \cdot E \cdot J} dx + \int_0^L \frac{\beta \cdot T_{(x)}^2}{2 \cdot G \cdot S} dx \right] = \\ &= 2 \cdot \left[ \int_0^L \frac{2 \cdot F \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot J} dx + \int_0^L \frac{2 \cdot \beta \cdot F}{2 \cdot G \cdot S} dx \right] = \frac{2}{E \cdot J} \int_0^L F \cdot x^2 dx + \frac{2 \cdot \beta}{G \cdot S} \int_0^L F dx = \\ &= \frac{2 \cdot F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J} + \frac{2 \cdot \beta \cdot F \cdot L}{G \cdot S} = \frac{2 \cdot F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J} + \frac{4 \cdot \beta \cdot F \cdot L \cdot (1 + \mu)}{E \cdot S} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} v_{FP} &= \frac{2 \cdot F \cdot L}{E} \left[ \frac{L^2}{3 \cdot J} + \frac{2 \cdot \beta \cdot (1 + \mu)}{S} \right] = \\ &= \frac{2 \cdot 1671,5 \cdot 449}{2,1 \cdot 10^5} \left[ \frac{449^2}{3 \cdot 1,91 \cdot 10^6} + \frac{2 \cdot 2 \cdot (1 + 0,3)}{1471} \right] = 0,187 \text{ mm} \end{aligned}$$

b) Zakřivená část

$$\begin{aligned} v_{FZ} &= 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial F} = \\ &= 2 \cdot \frac{\partial}{\partial F} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{(\varphi)}^2}{2 \cdot E \cdot e \cdot S \cdot R} R \cdot d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_{(\varphi)}^2}{2 \cdot E \cdot S} R \cdot d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta \cdot T_{(\varphi)}^2}{2 \cdot G \cdot S} d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{(\varphi)} \cdot N_{(\varphi)}}{E \cdot S \cdot R} R \cdot d\varphi \right] \\ v_{FZ} &= \frac{2}{E \cdot e \cdot S \cdot R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot (L + R \cdot \sin \varphi)^2 R \cdot d\varphi + \frac{2}{E \cdot S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot \sin^2 \varphi \cdot R \cdot d\varphi \\ &\quad + \frac{2 \cdot \beta}{G \cdot S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cdot \cos^2 \varphi \cdot R \cdot d\varphi \\ &\quad - \frac{2}{E \cdot S \cdot R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(L + R \cdot \sin \varphi) F \cdot \sin \varphi + F \cdot (L + R \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \varphi] R \cdot d\varphi \\ v_{FZ} &= \frac{F \left( L^2 \cdot \pi + 4R \cdot L + \frac{\pi}{2} \cdot R^2 \right)}{E \cdot e \cdot S} + \frac{F \cdot R \cdot \pi}{2 \cdot E \cdot S} + \frac{\beta \cdot F \cdot R \cdot \pi (1 + \mu)}{E \cdot S} - \frac{F(4L + R \cdot \pi)}{E \cdot S} \\ &= \frac{F}{E \cdot S} \left[ \frac{\pi \cdot L^2 + 4 \cdot R \cdot L + \frac{\pi}{2} \cdot R^2}{e} + \frac{\pi \cdot R}{2} + \pi \cdot \beta \cdot R (1 + \mu) - (4 \cdot L + \pi \cdot R) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Jednotlivé integrály byly řešeny, viz (3.19), (3.20), (3.21), navíc je zde jen poslední člen, který řeším následovně:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(L + R \cdot \sin \varphi) F \cdot \sin \varphi + F \cdot (L + R \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \varphi] R \cdot d\varphi = \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2F \cdot (L + R \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \varphi R \cdot d\varphi = \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2F \cdot L \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2F \cdot R^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \\
& = 2F \cdot L \cdot R [\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2F \cdot R^2 \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2F \cdot L \cdot R + \frac{F \cdot R^2 \cdot \pi}{2}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Nyní číselně dosadíme do výsledného vztahu (3.34).

$$\begin{aligned}
v_{FZ} &= \frac{F}{E \cdot S} \left[ \frac{\pi \cdot L^2 + 4 \cdot R \cdot L + \frac{\pi}{2} \cdot R^2}{e} + \frac{\pi \cdot R}{2} + \pi \cdot \beta \cdot R(1 + \mu) - (4 \cdot L + \pi \cdot R) \right] = \\
&= \frac{1671,5}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 1471} \left[ \frac{\pi \cdot 449^2 + 4 \cdot 150 \cdot 449 + \frac{\pi}{2} \cdot 150^2}{e} + \frac{\pi \cdot 150}{2} \right. \\
&\quad \left. + \pi \cdot 2 \cdot 150(1 + 0,3) - (4 \cdot 449 + \pi \cdot 150) \right] = \\
&= 5,41 \cdot 10^{-6} [105,152 + 0,236 + 1,225 - 2,267] = 0,565 \text{ mm}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Celkový průhyb je tedy:

$$v_F = v_{FP} + v_{FZ} = 0,187 + 0,565 = 0,751 \text{ mm} \tag{3.37}$$

### 3.3 Shrnutí dosažených výsledků z analytického řešení

Vypočetli jsme napětí na dvou místech vyšetřovaného průřezu.

	Napětí [MPa]		Posuv [mm] (ve směru síly F)
	vnější ( $r_2$ )	vnitřní ( $-r_2$ )	
Tenký křivý prut	26,757	-29,029	0,591
Tlustý křivý prut	22,186	-36,031	0,751

Tab. 1 – Hodnoty vypočtené analyticky

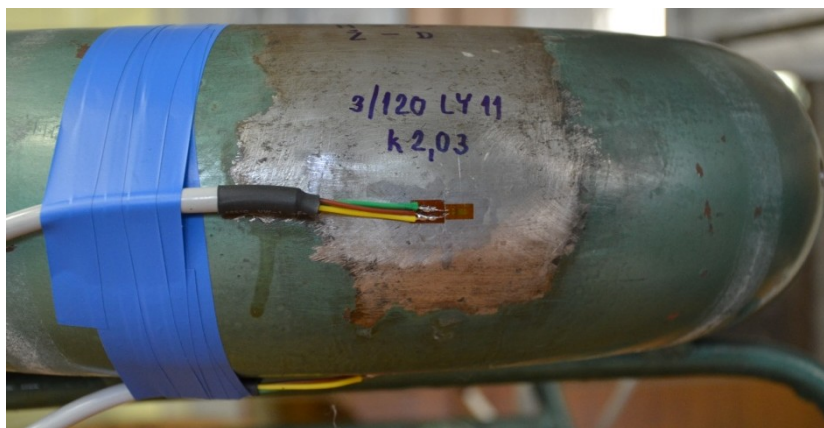
Pro nás je podstatné hlavně napětí, které je označeno v Tab.1 jako vnitřní, tedy -36,031MPa a posuv ve směru nositelky síly F  $v_F = 0,751 \text{ mm}$ , jelikož v tomto místě bylo provedeno měření. Záměrně jsou zde uvedeny výsledky vyplývající z teorie tlustých křivých prutů, jelikož poměr  $R/h$  je menší než 5 v případě, že bereme zakřivení střednice  $R=150 \text{ mm}$  a výšku profilu  $h=106,4 \text{ mm}$ . Nastává zde ovšem otázka, jak velkou roli zde hraje tloušťka stěny prutu.

## 4 Experimentální měření

Původně jsme měli pouze prut s rámem, ve kterém bylo možno měřit pouze posuv pomocí posuvného měřítka nebo metru. Chyběl zde snímač síly, jehož pomocí bychom dokázali úlohu vyhodnotit. Byly zde nalepeny dva tenzometry v místě A (Obr. 4. 3) s neznámým k-faktorem. Rozhodli jsme se tento měřicí obvod inovovat.

### 4.1 Příprava měřícího obvodu

Odstranili jsme staré tenzometry a vybrali jsme vhodné místo pro lepení nových tenzometrů. Povrch v místech lepení tenzometrů jsme očistili od laku, odmastili a vysušili. Zároveň jsme si na součást narýsovali rysky pro přesnější umístění tenzometru na střed výšky v ose symetrie prutu (horizontální rovina). Pomocí speciálního lepidla jsme nalepili tenzometry na předem připravená místa. Měli jsme k dispozici dva jednoduché elektrické odporové fóliové tenzometry (nalepeny v místech B a C – Obr. 4. 1) a jeden tenzometrický kříž (nalepen v místě A – Obr. 4. 2). Poté jsme připájeli vodiče na pájecí vývody tenzometrů. Jednotlivé kabely jsme ještě přilepili v místech poblíž jednotlivých tenzometrů, abychom zamezili případnému odtržení. Do přípravku jsme na pravou stranu upevnili tenzometrický snímač polohy a na levou stranu snímač síly.

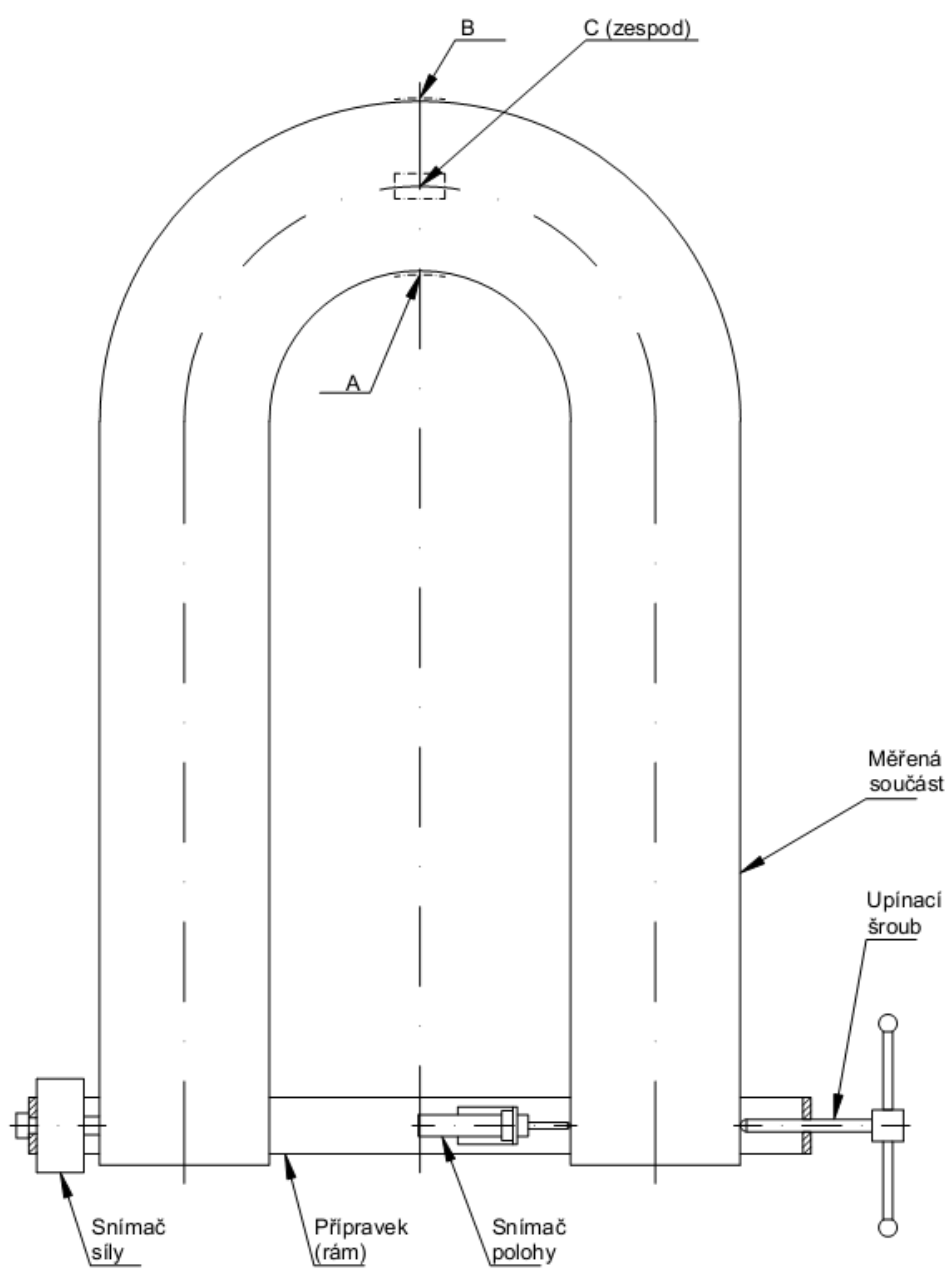


Obr. 4. 1 – Nalepený jednoduchý tenzometr



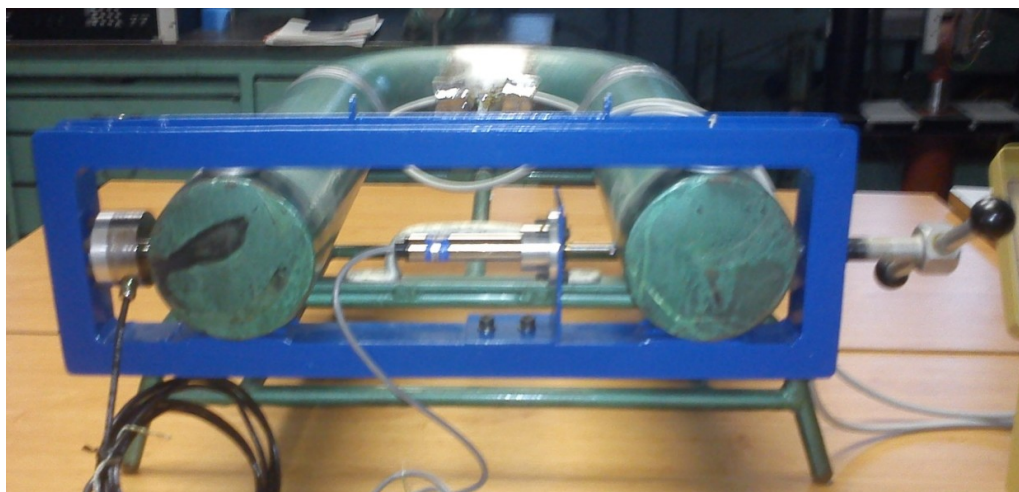
Obr. 4. 2 – Nalepený tenzometrický kříž

Schéma měření:



Obr. 4. 3 – Schéma měření po inovaci





Obr. 4. 4 – Ustavená součást, odpovídající schématu měření.

## 4.2 Použitá zařízení

Pro měření deformací jsme použili dva jednoduché tenzometry typu 3/120 LY11 zakoupené u firmy HBM s nominálním odporem  $120\Omega$  a k-faktorem  $k=2,03$  (Obr. 4. 1) [11]. Tenzometrický kříž od firmy Vishay, typ WA-06-060WT-120 (Obr. 4. 2) taktéž s nominálním odporem  $120\Omega$  a k-faktorem  $k=2,1$  [12]. K vizualizaci hodnot bylo za potřebí dvou přístrojů, jelikož jsme potřebovali měřit na dvou místech (kanálech) zároveň. Jednokanálové měřicí aparatury P-3500 (Obr. 4. 6) umožňující zadat požadovaný k-faktor, zapojení do čtvrt, půl i celého můstku se zabudovanými  $120\Omega$  a  $350\Omega$  můstky. A deseti kanálové přepínací skříň SB-10 (Obr. 4. 5) kompatibilní s měřicí aparaturou. Oby tyto přístroje jsou od firmy Vishay [12].

V neposlední řadě byl použit snímač síly LCM305-5KN (Obr. 4. 8) (kalibrační list viz Příloha L) firmy Omega [13], který má při  $5\,000\text{N}$  výstup  $1,99524\text{mV/V}$  a snímač polohy HS25 (Obr. 4. 7) (kalibrační list viz Příloha K) firmy Vishay který má při  $25\text{mm}$  výstup  $6,293\text{mV/V}$ .

### Převod jednotek:

Pro převod z jednotek mikrostrainů<sup>4</sup> na milimetry nebo newtony si z dat napsaných v kalibračních listech (např. pomocí trojčlenky) dokážeme určit, kolika newtonům odpovídá naměřená hodnota.

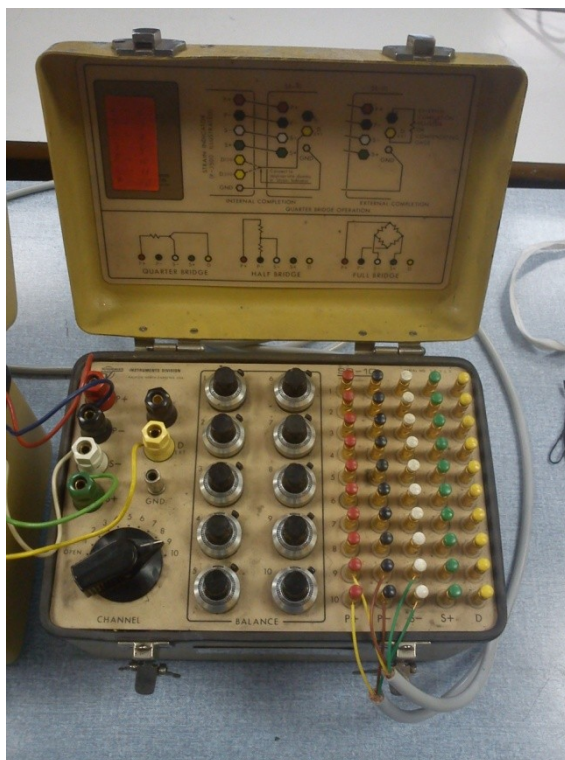
Pro snímač síly:

$5000\text{N}$  odpovídá hodnotě  $1,99524[\text{mV/V}] \cdot 2000 \rightarrow 3990,48\mu\text{S}$

Pro snímač polohy:

$25\text{mm}$  odpovídá  $6,293[\text{mV/V}] \cdot 2000 \rightarrow 12586\mu\text{S}$

<sup>4</sup> Mikrostrain – jednotka používaná v tenzometrii pro poměrnou deformaci  $\epsilon$ .  $\epsilon$  se tedy udává v  $\mu\text{m/m}$  neboli mikrostrainech  $\mu\text{S}$ , někdy označováno  $\mu\epsilon$ .



Obr. 4. 5 – Přepínací skříň



Obr. 4. 6 – Strain indikátor



Obr. 4. 7 – Snímač polohy



Obr. 4. 8 – Snímač síly

### 4.3 Postup měření

Připojili jsme oba snímače ke svým měřicím aparaturám. Připravené vývody z tenzometrů jsme zapojili do přepínací skříně a tu jsme propojili s měřicí aparaturou. Nastavili jsme požadovaný k-faktor a vyvážíli můstky. Taktéž jsme vynulovali měřící obvody na výstupu snímače síly a snímače polohy. Měřicí řetězec je uveden na Obr. 4. 9.

Poté jsme zatížili součást na tři různé hladiny síly a odečetli hodnoty z přístrojů. Po třetím měření jsme součást odlehčili a zkontrolovali, jestli se deformace vrátili na nulu. Celé toto měření jsme opakovali třikrát pro místo A, místa B a C jsme měřili jen dvakrát.

### 4.4 Výpočet napětí z naměřených deformací

V místě nalepení tenzometrů může vzniknout jednoosá nebo dvouosá napjatost. Mohou nastat tři případy:

- a) Pokud se jedná o jednoosou napjatost a známe směr hlavního nenulového napětí, postačí nám jednoduchý tenzometr, nalepený ve směru tohoto hlavního napětí a znalost Hookeova zákona pro jednoosou napjatost:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \quad (4.1)$$

- b) Pokud se jedná o dvouosou napjatost a známe směry hlavních napětí, budeme potřebovat tenzometrický kříž, nalepený ve směrech hlavních napětí. Velikost hlavních napětí vypočteme z obecného Hookeova zákona pro rovinnou napjatost:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) \quad (4.2)$$

- c) Pokud se jedná o dvouosou napjatost a neznáme směry hlavních napětí, budeme potřebovat k určení těchto hl. napětí např. tenzometrickou růžici (pravoúhlou nebo rovnostrannou). Velikost hlavních poměrných deformací a jejich směrů můžeme určit početně nebo graficky pomocí Mohrovy kružnice pro deformace v souřadném systému  $\varepsilon - \frac{\gamma}{2}$  (platí zde obdobné vztahy jako pro souřadnicový systém  $\sigma - \tau$ ).



Obr. 4. 9 – Vlevo připojení snímačů síly a odchylky k aparaturám P-3500 a vpravo připojení tenzometrů k přepínací skříni SB-10 na 9 a 10 kanál, propojen opět s aparaturou P-3500 pro odečítání výsledných hodnot deformací.

## 4.5 Výsledky měření a výpočtů

### Měření na vnitřní straně vyšetřovaného průřezu – Místo A:

Kanál 9 Podélný tenzometr

Kanál 10 Příčný tenzometr

#### 1. Měření

	Síla		Poloha		Kanál	
	[ $\mu$ S]	[N]	[ $\mu$ S]	[mm]	9 [ $\mu$ S]	10 [ $\mu$ S]
	0	0	0	0	0	0
a)	605	758,054	952	1,891	-20	-107
b)	964	1207,875	1556	3,091	-33	-173
c)	1334	1671,478	2171	4,312	-45	-240

Tab. 2 – Hodnoty naměřené při prvním zatěžování

## 2. Měření

	Síla		Poloha		Kanál	
	[μS]	[N]	[μS]	[mm]	9 [μS]	10 [μS]
	0	0	0	0	0	0
a)	606	759,307	974	1,935	-21	-109
b)	964	1207,875	1550	3,079	-33	-173
c)	1338	1676,490	2197	4,364	-47	-244

Tab. 3 – Hodnoty naměřené při druhém zatěžování

## 3. Měření

	Síla		Poloha		Kanál	
	[μS]	[N]	[μS]	[mm]	9 [μS]	10 [μS]
	0	0	0	0	0	0
a)	605	758,054	959	1,905	-21	-109
b)	964	1207,875	1540	3,059	-33	-172
c)	1330	1666,466	2146	4,263	-45	-238

Tab. 4 – Hodnoty naměřené při třetím zatěžování

	Zátěž		
	a)	b)	c)
Síla	758,472	1207,875	1671,478
Posuv	1,910	3,076	4,313

Tab. 5 – Průměrné hodnoty

Kde při analytickém a numerickém výpočtu uvažujeme maximální zátěž z Tab. 5, tedy 1671,5N. Při tomto zatížení bylo naměřeno a následně vypočteno napětí viz Tab. 6 případ c).

Výpočet hlavních napětí v podélném a příčném směru:

Výpočet provedeme pomocí obecného Hookeova zákona pro rovinnou napjatost rovnice (4.2). Pro naměřené hodnoty z měření 1. a):

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2) = \frac{2,1 \cdot 10^5}{1 - 0,3^2} [-20 \cdot 10^{-6} + 0,3(-107 \cdot 10^{-6})] = -12,02 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_2 + \mu \epsilon_1) = \frac{2,1 \cdot 10^5}{1 - 0,3^2} [-107 \cdot 10^{-6} + 0,3(-20 \cdot 10^{-6})] = -26,08 \text{ MPa}$$

### 1. Měření

	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]
a)	-12,02	-26,08
b)	-19,59	-42,21
c)	-27	-58,5

Tab. 6 – 1. měření

### 2. Měření

	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]
a)	-12,39	-26,61
b)	-19,59	-42,21
c)	-27,74	-59,56

Tab. 7 – 2. měření

### 3. Měření

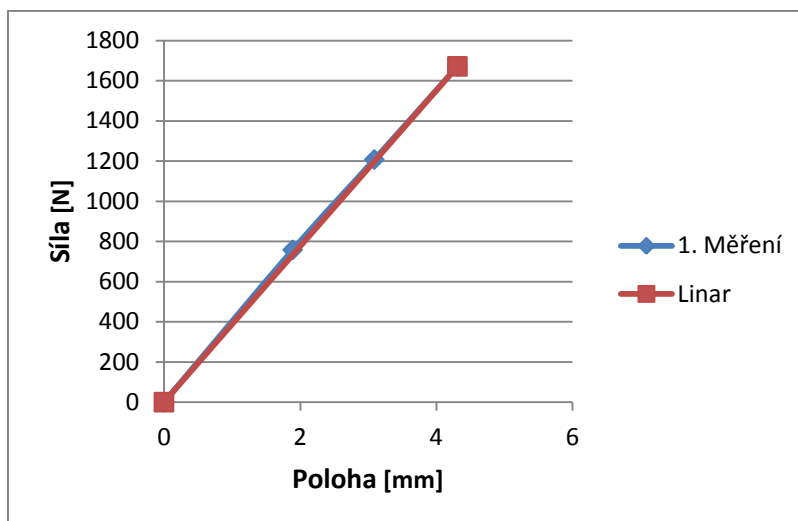
	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]
a)	-12,39	-26,61
b)	-19,52	-41,98
c)	-26,86	-58,04

Tab. 8 – 3. měření

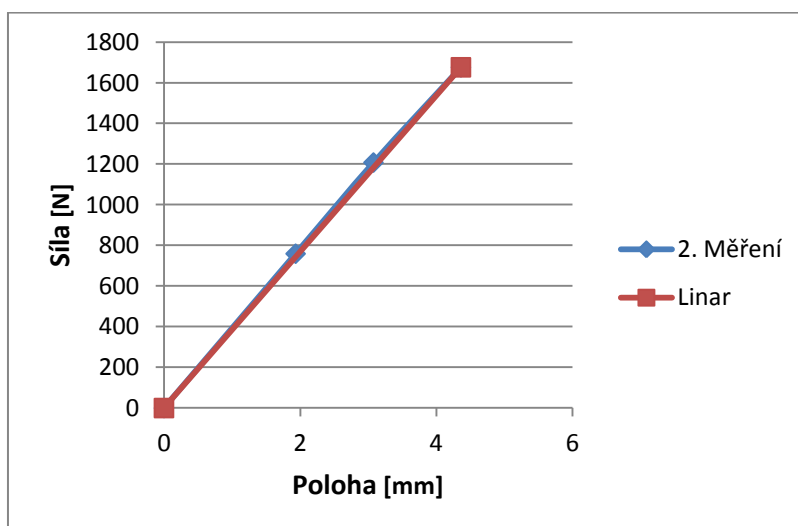
$\sigma_1 \dots$  Napětí v podélném směru

$\sigma_2 \dots$  Napětí v příčném směru

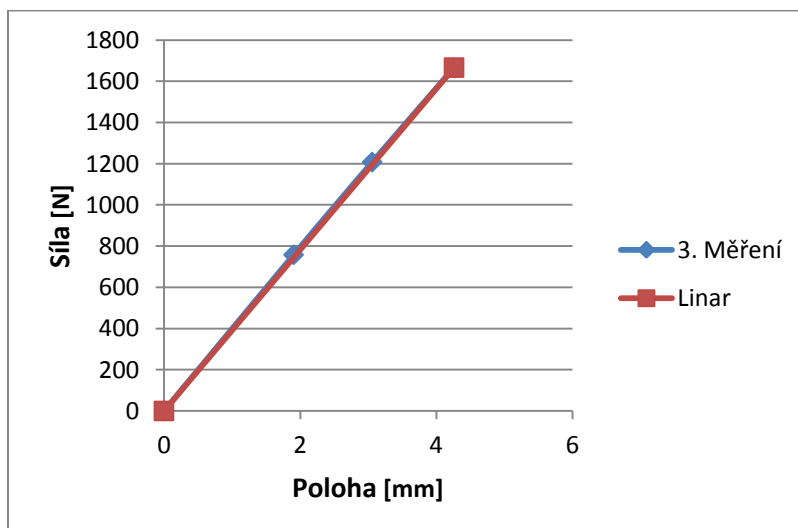
Vyneseme-li graf závislosti průhybu na síle pro jednotlivá měření (Obr. 4. 10 - 12), abychom zjistili, zdali můžeme předpokládat lineární závislost, tedy platnost Hookeova zákona.



Obr. 4. 10 – Graf závislosti síly na průhybu pro 1. měření



Obr. 4. 11 – Graf závislosti síly na průhybu pro 2. měření



Obr. 4. 12 – Graf závislosti síly na průhybu pro 3. měření

Z grafů je vidět, že závislost mezi zatěžující silou a posuvem je lineární.

Napětí naměřené v podélném směru na zadní a spodní straně vyšetřovaného průřezu –

Místo B a C:

Kanál 9                      zadní strana vyšetřovaného průřez (místo B)

Kanál 10                     spodní strana vyšetřovaného průřez (místo C)

1. Měření

	Síla		Kanál	
	[ $\mu$ S]	[N]	9 [ $\mu$ S]	10 [ $\mu$ S]
a)	605	758,054	-11	47
b)	964	1207,875	-17	75
c)	1333	1670,225	-24	104

Tab. 9 – Výsledky měření

2. Měření

	Síla		Kanál	
	[ $\mu$ S]	[N]	9 [ $\mu$ S]	10 [ $\mu$ S]
a)	606	759,307	-10	46
b)	964	1207,875	-16	74
c)	1335	1672,731	-23	103

Tab. 10 - Výsledky měření

#### 4.6 Shrnutí dosažených výsledků z experimentálního měření

V jednotlivých místech součásti, jsme pomocí elektrických odporových fóliových tenzometrů zjistili jednotlivé změny ohmického odporu, které byly uvnitř aparatury rovnou převedeny na poměrnou deformaci. Díky tomuto výstupu, s využitím Hookeova zákona (rovnice (4.1) nebo (4.2)), umíme v místě měření zjistit jednotlivá napětí na povrchu součásti. Tenzometry v místě A byly nalepeny v předpokládaných směrech hlavních napětí, tedy s využitím (4.2) dokážeme určit velikost hlavních napětí. Jak si můžeme všimnout, napětí v příčném směru jsou o mnoho větší než ve směru podélném.

Měření v místě B a C bylo prováděno pouze v jednom směru. Proto nyní nelze určit velikost hlavních napětí v daných místech (bodech). To by se ovšem dalo vyřešit buď to nalepením dalšího jednoduchého tenzometru ve směru předpokládaného dalšího hlavního napětí (příčný směr), pomocí MKP<sup>5</sup> určit napětí a zpětně dopočítat deformace, nebo nalepit do míst B a C tenzometrickou růžici. Tím bychom nejpřesněji určili jak velikosti, tak směry hlavních napětí, avšak je to nákladnější než první možnost a znamenalo by to nutnost odstranění již nalepených jednoduchých tenzometrů (tedy jejich zničení).

---

<sup>5</sup> Metoda konečných prvků.



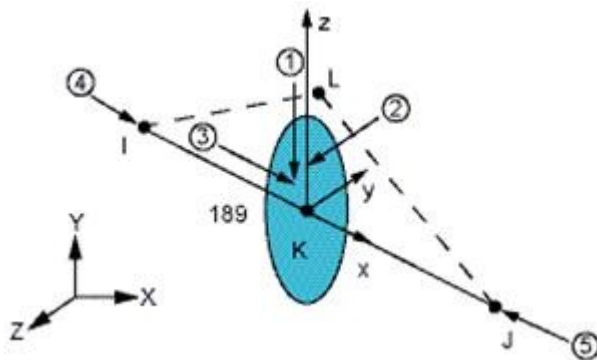
## 5 Numerické řešení

V této části bakalářské práce se budeme zabývat, jak už název napovídá, numerickým řešením zadané součásti. Která byla řešena jak analyticky, tak byla i experimentálně měřena. Nyní ji budeme řešit pomocí programu ANSYS 12.1. K řešení použijeme hned několik různých druhů prvků. Podkapitoly nazveme podle zvoleného prvku a nastíníme rozdílné přístupy při řešení pomocí MKP. U všech případů budeme uvažovat modul pružnosti v tahu  $E=210\,000\text{MPa}$ , Poissonovu konstantu  $\mu=0,3$  a zatížení silou  $F=1671,5\text{N}$ . Rozměry viz Příloha A.

### 5.1 MKP model vytvořený pomocí prvku typu Beam

K řešení byl použit prvek Beam189. Tento prvek je použitelný pro analýzu štíhlých až tlustých nosníkových konstrukcí. Je založen na Timošenkově teorii, která zahrnuje smykové deformační účinky. Zahrnuje možnost použití pro vázané i nevázané zkroucení příčného průřezu.

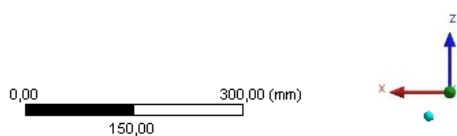
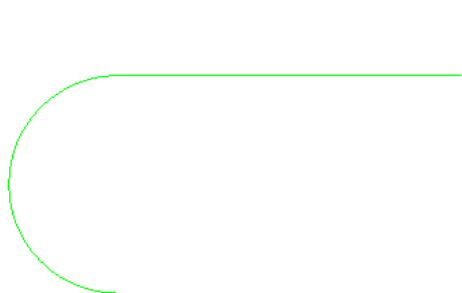
Beam189 je kvadratický tři-uzlový nosníkový prvek ve 3D (Obr. 5. 1) [10]. Ve výchozím nastavení má každý uzel šest stupňů volnosti, jsou to posuvy ve směru osy  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a rotace okolo těchto os. Prvek je vhodný pro lineární analýzy. Prvek zahrnuje napětově-tuhostní podmínky, které umožňují analýzu ohybové, příčné a torzní stability. Jsou podporovány pružnost, plasticita, tečení a další nelineární materiálové modely.



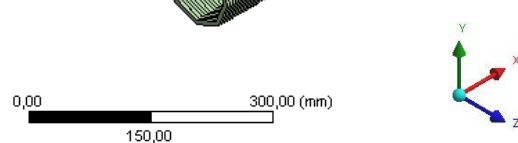
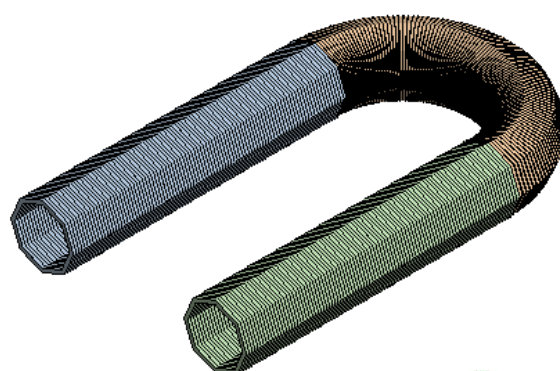
Obr. 5. 1 – Geometrie nosníkového prvku Beam189

#### Geometrický model + síť konečných prvků:

Myšlenka při vytváření geometrického modelu pomocí nosníkového prvku je taková, že vytvoříme pouze střednici prutu a poté jí přidělíme příčný průřez (Obr. 5. 2). Geometrický model převedeme na konečnoprvkový model tak, že ho necháme vysítovat. Při tak jednoduché součásti jako je ta naše, můžeme použít bez problémů jemnější síť (Obr. 5. 3). Zde je použito 285 elementů a 856 uzlů.



Obr. 5. 2 – Geometrický model



Obr. 5. 3 – Konečnoprvkový model

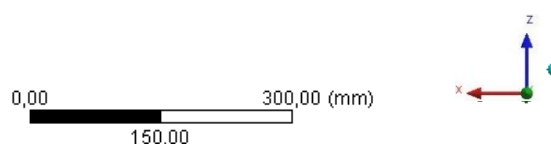
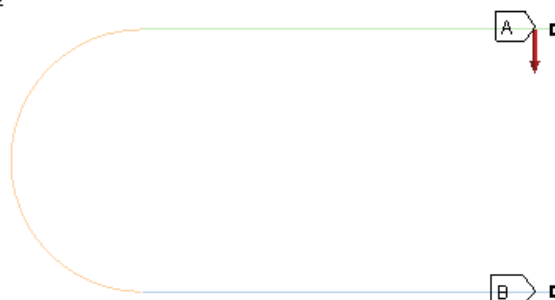
Příčný průřez byl definován jako mezikruží. I když se součást vykreslila jako osmihran, nenechme se zmást, je to jen grafické znázornění a na výpočet nemá vliv.

#### Okrajové podmínky:

Vykreslíme si okrajové podmínky (Obr. 5. 4), zde jsou součásti odebrány všechny stupně volnosti ve vzdálenosti 25mm od volného konce přímé části (štítek B) a ve stejné vzdálenosti (ale na opačném konci) je i zatížení F (štítek A).

**C: Beam**  
Static Structural  
Time: 1, s  
7.5.2012 17:42

**A** Remote Force: 1671,5 N  
**B** Remote Displacement 2



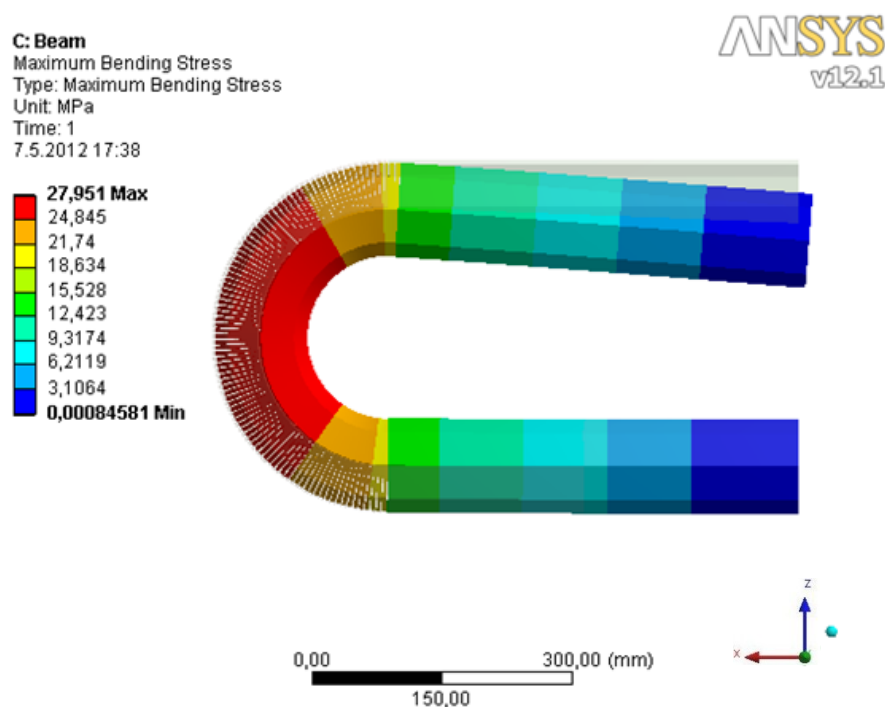
Obr. 5. 4 – Okrajové podmínky



### Výsledky:

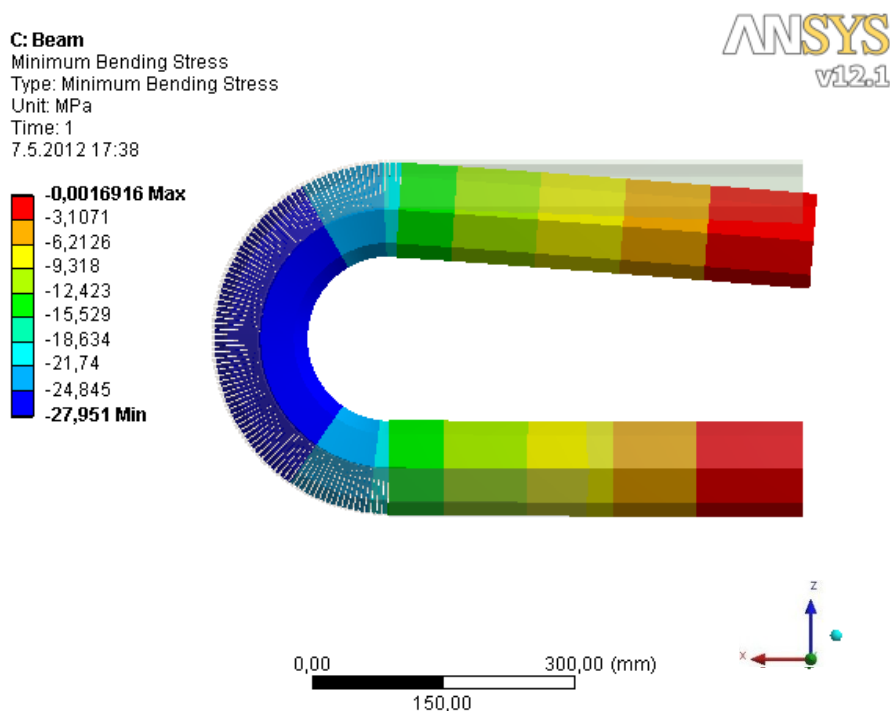
Jakmile proběhne výpočet, vykreslíme si výsledky. Při použití nosníkového prvku nám ANSYS nabízí výsledky v podobě maximálního (Obr. 5. 5) a minimálního (Obr. 5. 6) napětí od ohybového momentu, napětí od normálové síly (Obr. 5. 7) a průhyb (Obr. 5. 8).

#### Maximální napětí od ohybového momentu



Obr. 5. 5 – Maximální ohybové napětí

#### Minimální napětí od ohybového momentu



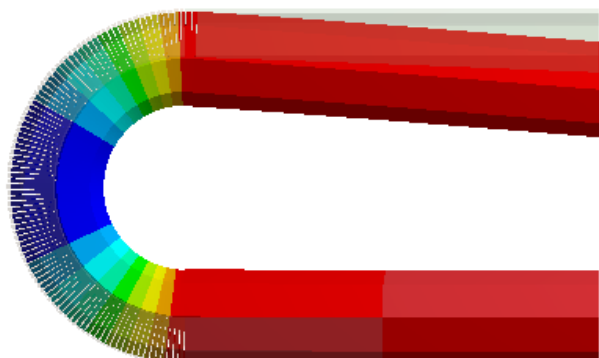
Obr. 5. 6 – Minimální ohybové napětí

## Napětí od normálové síly

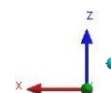
**C: Beam**  
Direct Stress  
Type: Direct Stress  
Unit: MPa  
Time: 1  
7.5.2012 17:38

**ANSYS**  
v12.1

**5,4644e-10 Max**  
-0,12634  
-0,25267  
-0,37901  
-0,50534  
-0,63168  
-0,75802  
-0,88435  
-1,0107  
**-1,137 Min**



0,00 300,00 (mm)  
150,00



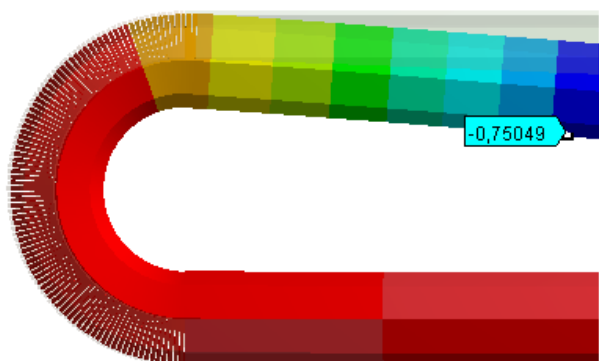
**Obr. 5. 7 – Normálové napětí**

## Maximální průhyb ve směru osy z

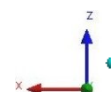
**C: Beam**  
Directional Deformation  
Type: Directional Deformation ( Z Axis )  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
7.5.2012 18:23

**ANSYS**  
v12.1

**0,09829 Max**  
-0,0042669  
-0,10682  
-0,20938  
-0,31194  
-0,41449  
-0,51705  
-0,61961  
-0,72216  
**-0,82472 Min**



0,00 300,00 (mm)  
150,00



**Obr. 5. 8 - Průhyb**

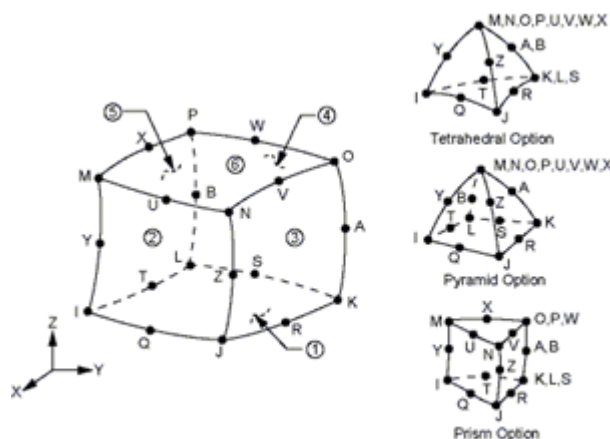
Z Obr. 5.5 až Obr. 5.8 tedy můžeme vyčíst velikost napětí a posuvu:

Typ elementu	Síla [N]	$\sigma_N$ [MPa]	$\sigma_{Mo}$ [MPa]	Posuv [mm]
Beam	1671,5	-1,137	$\pm 27,951$	0,825

**Tab. 11 – Vypočtené hodnoty**

## 5.2 MKP model vytvořený pomocí prvku typu Solid

K řešení byl použit prvek Solid186 [10]. Jedná se o dvacet uzlový 3D prvek který vykazuje kvadratický posuv (Obr. 5. 9). Každý z uzlů má tři stupně volnosti – posuv ve směrech os x, y a z. Prvek podporuje plasticitu, hyperelasticitu, tečení a další. Také má smíšené formulace funkcí pro téměř nestlačitelné elastoplastické materiály a zcela nestlačitelné hyperelastické materiály. Tento prvek je skvěle použitelný pro modelování nepravidelných sítí.



Obr. 5. 9 – Geometrie prvku Solid186

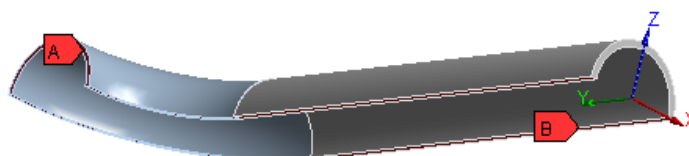
### Geometrický model:

Dostaneme-li hotový geometrický model odněkud z firmy, je nejpravděpodobnější, že to bude případ právě pro řešení objemovými prvky. Zde se nejdříve vymodeluje součást jako objem a vysítujeme ji tetraedry nebo hexaedry.

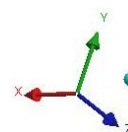
Symmetry Region 2  
Analysis Settings  
7.5.2012 0:45

**A** Symmetry Region  
**B** Symmetry Region 2

ANSYS  
v12.1



0,00 200,00 (mm)  
100,00

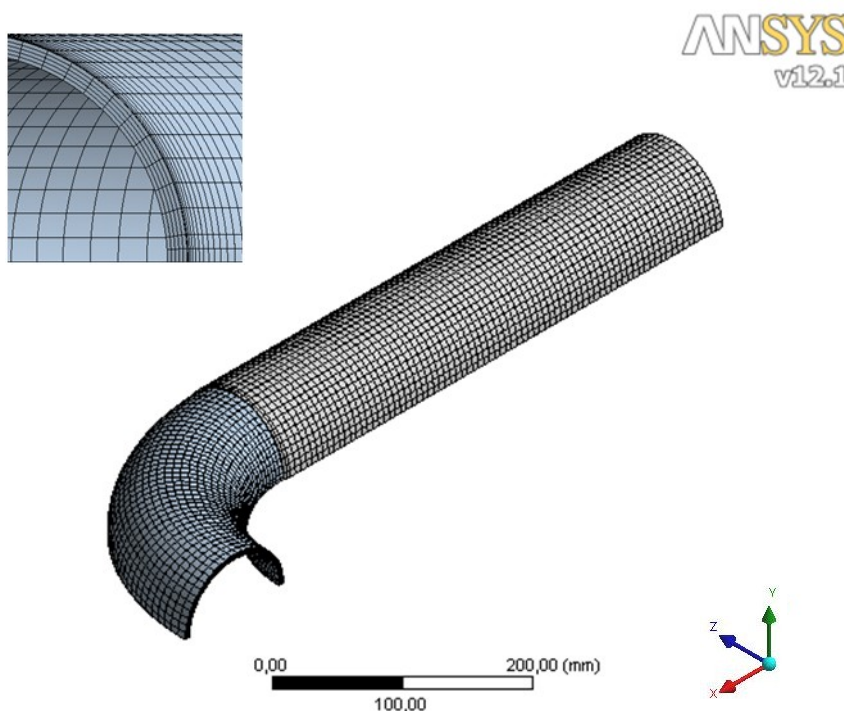


Obr. 5. 10 – Geometrický model s definovanými plochami symetrie

Naše součást má dvě osy symetrie, proto je vhodné tyto roviny symetrie definovat (vertikální rovina symetrie – štítek A; horizontální rovina – štítek B), ušetříme tak čas při řešení z důvodu menšího počtu elementů (Obr. 5. 10).

#### Sít' konečných prvků:

Na následujícím obrázku (Obr. 5. 11) vidíme konečnoprvkový model, kde v levém horním rohu je zvětšení zakřivené části. Po tloušťce stěny zakřivené části je pět elementů. V tomto modelu je použito 21 140 elementů a 97 718 uzlů.



**Obr. 5. 11 – Konečnoprvkový model**

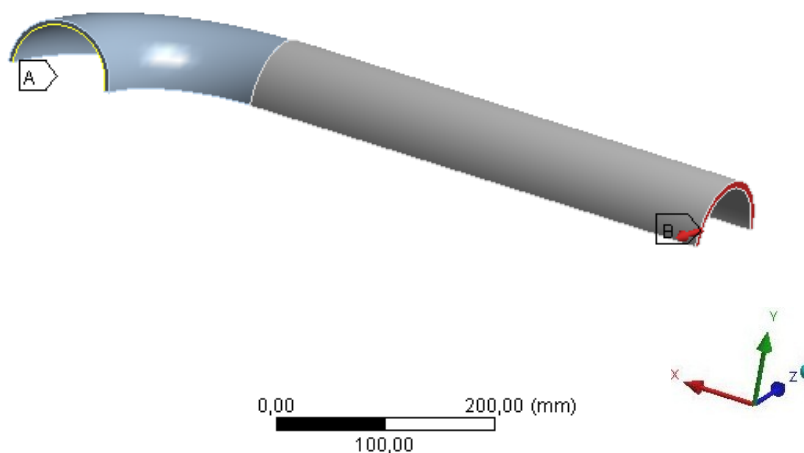
#### Okrajové podmínky:

Definováním dvou rovin symetrie jsme odstranili téměř všechny možné posuvy až na jeden. Tomu zamezíme tím, že křivce (Obr. 5. 12) odebereme posuv ve směru osy x (štítek A). Rovina symetrie x-z nám také rozděljuje sílu F napůl, proto ji zadáváme poloviční, než je síla celková. Tuto sílu definujeme na plochu (štítek B), opět ve vzdálenosti 25mm od volného konce.

**A: Solid 2xsymetrie**  
 Static Structural  
 Time: 1, s  
 7.5.2012 19:38

**ANSYS**  
 v12.1

**A** Remote Displacement  
**B** Remote Force: 835,75 N



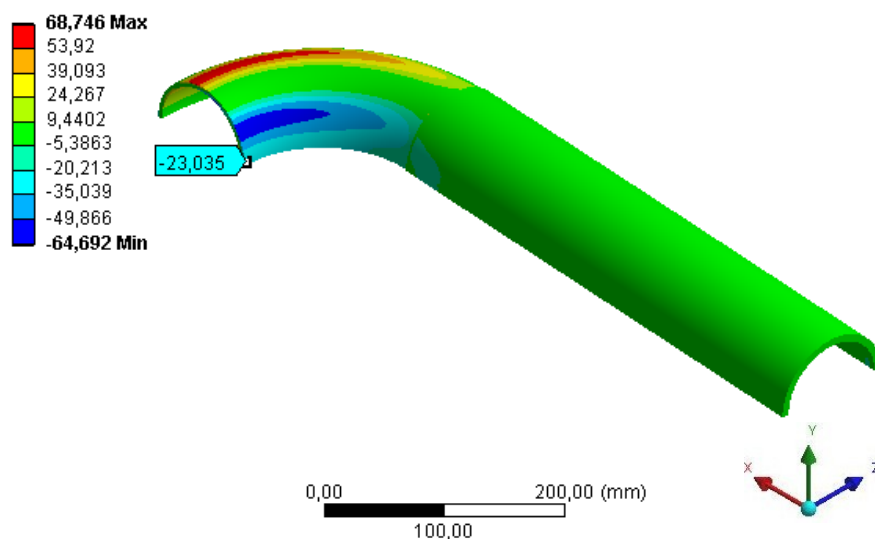
Obr. 5. 12 – Okrajové podmínky

Výsledky:

Hlavní napětí v podélném směru

**A: Solid 2xsymetrie**  
 Middle Principal Stress  
 Type: Middle Principal Stress  
 Unit: MPa  
 Time: 1  
 7.5.2012 0:53

**ANSYS**  
 v12.1

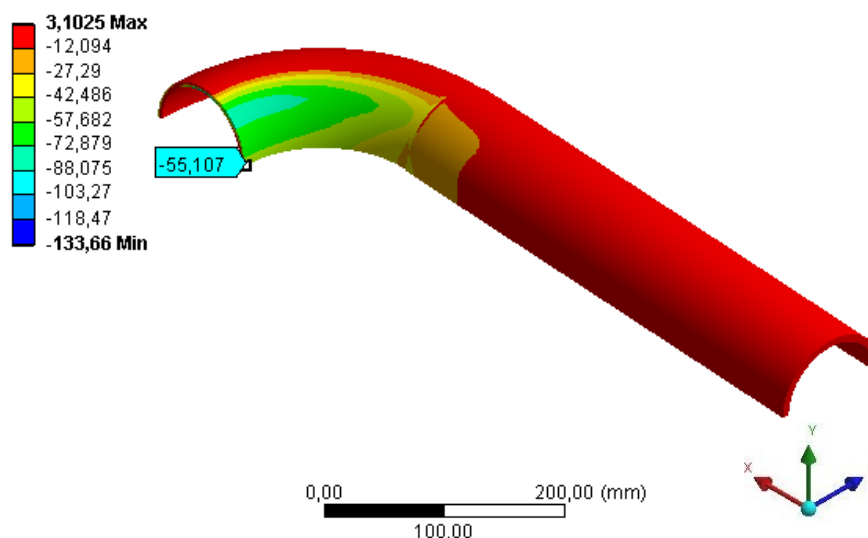


Obr. 5. 13 – První hlavní napětí

## Hlavní napětí v příčném směru

**A: Solid 2xsymetrie**  
Minimum Principal Stress  
Type: Minimum Principal Stress  
Unit: MPa  
Time: 1  
7.5.2012 0:53

**ANSYS**  
v12.1



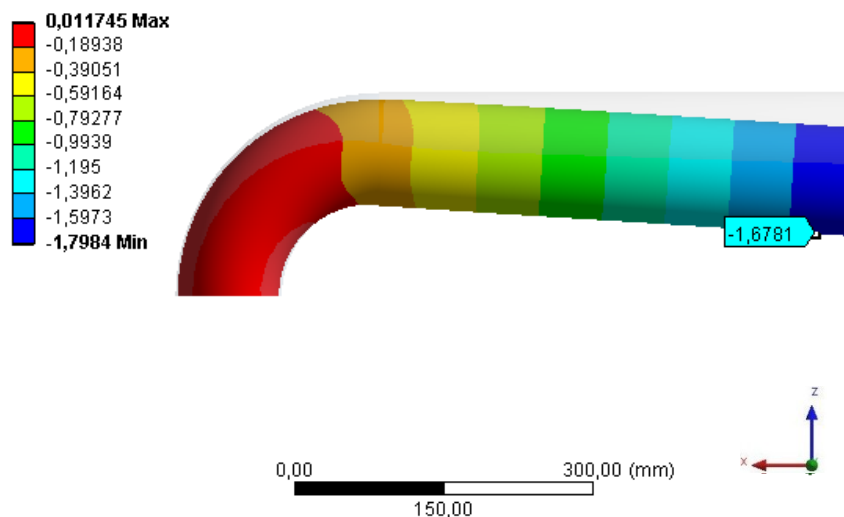
**Obr. 5. 14 – Druhé hlavní napětí**

Hlavní napětí v podélném směru v daném bodě odpovídá normálovému napětí v ose z, hlavní napětí v příčném směru v daném bodě odpovídá normálovému napětí v ose y.

## Deformaci ve směru osy z

**A: Solid 2xsymetrie**  
Directional Deformation  
Type: Directional Deformation ( Z Axis )  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
7.5.2012 18:42

**ANSYS**  
v12.1



**Obr. 5. 15 - Průhyb**

Hodnota -1,6781mm je průhyb odpovídající pouze polovině součásti. Celkový průhyb tedy bude dvojnásobek zobrazené hodnoty. Záporné znaménko pouze udává směr proti ose z.

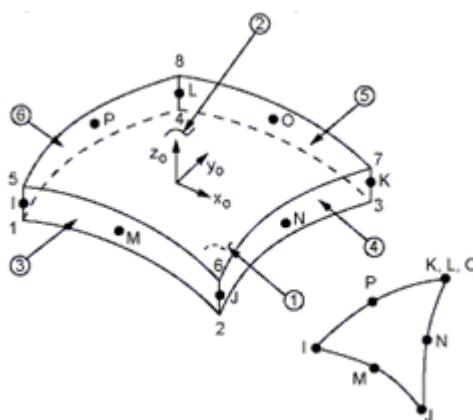
Z Obr. 5.13 až Obr. 5.15 můžeme vyčíst velikost napětí a posuvu:

Typ elementu	Síla [N]	$\sigma_N$ [MPa]	$\sigma_{Mo}$ [MPa]	Posuv [mm]
Solid	1671,5	-23,035	-55,107	3,356

Tab. 12 – Vypočtené hodnoty

### 5.3 MKP model vytvořený pomocí prvku typu Shell

K řešení byl použit prvek Shell281 (Obr 5. 16) [10]. Tento prvek je vhodný pro analýzu tenkých až středně silných skořepinových konstrukcí. Má osm uzlů, každý tento uzel má šest stupňů volnosti – posuvy ve směrech os x, y, z a rotace okolo nich. Je vhodný pro lineární analýzy. Shell281 mohou být použity pro vrstvené aplikace jako je modelování laminované kompozitní skořepiny nebo vrstvených konstrukcí.



Obr. 5. 16 – Geometrie prvku Shell281

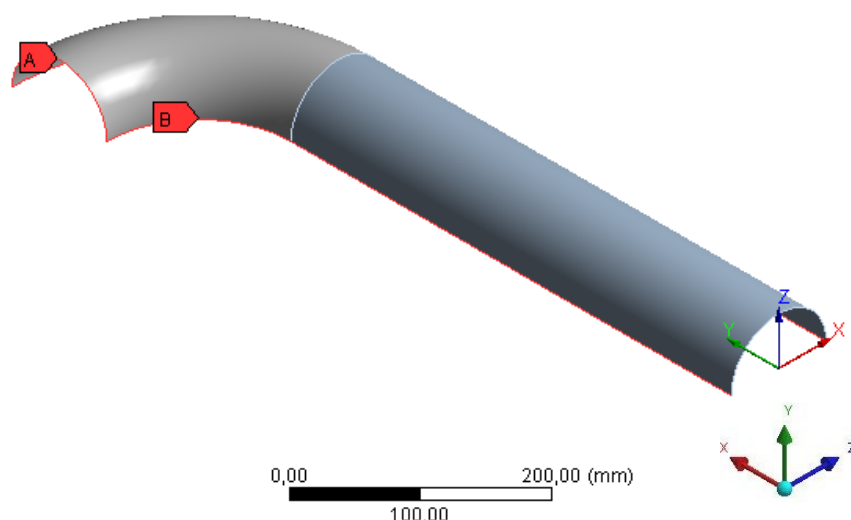
#### Geometrický model:

Při modelování geometrického modelu je zapotřebí vymodelovat střední plochu. Daný model je tvořen pouze plochami, kterým se přiřadí odpovídající tloušťka. Opět byly využity dvě plochy symetrie (Obr. 5. 17).

Symmetry Region 2  
Directional Deformation  
7.5.2012 1:20

ANSYS  
v12.1

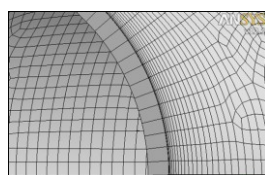
**A** Symmetry Region  
**B** Symmetry Region 2



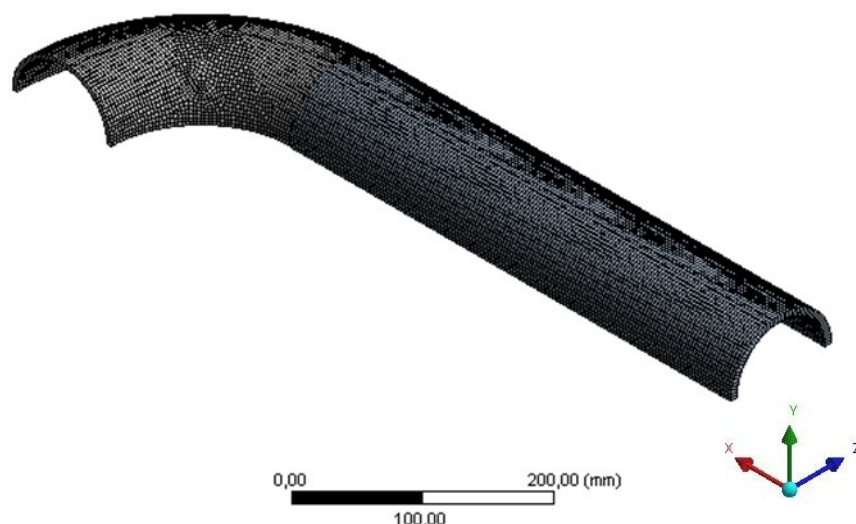
**Obr. 5. 17 – Geometrický model s definovanými plochami symetrie**

#### Síť konečných prvků:

Konečnoprvkový skořepinový model má po tloušťce pouze jeden element (Obr. 5. 18), celkový počet elementů činí 12 821 s 39 034 uzly.



ANSYS  
v12.1



**Obr. 5. 18 – Konečnoprvkový model**

#### Okrajové podmínky:

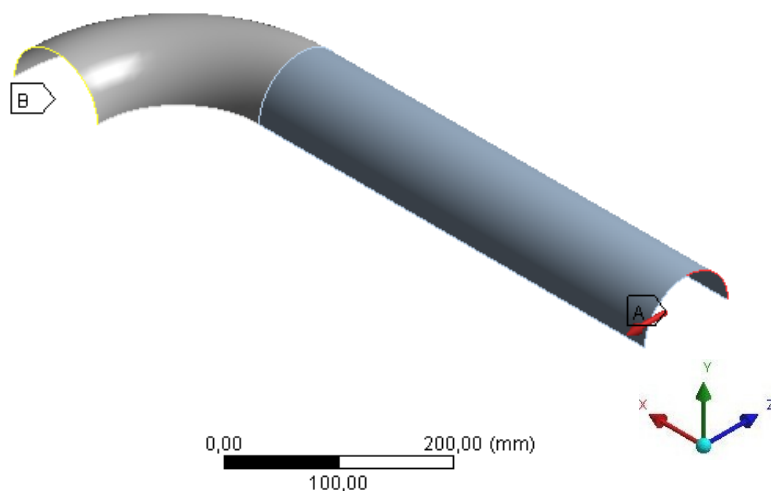
Jsou řešeny obdobně jako v předchozím případě, kapitola 5.2. Zadána síla 835,75N z důvodu využití symetrie, 25mm od konce přímé části (štítek A). A zamezíme posuvu v ose x (štítek B) (Obr. 5. 19).



D: Shell  
Static Structural  
Time: 1, s  
7.5.2012 21:05

ANSYS  
v12.1

**A** Remote Force: 835,75 N  
**B** Remote Displacement



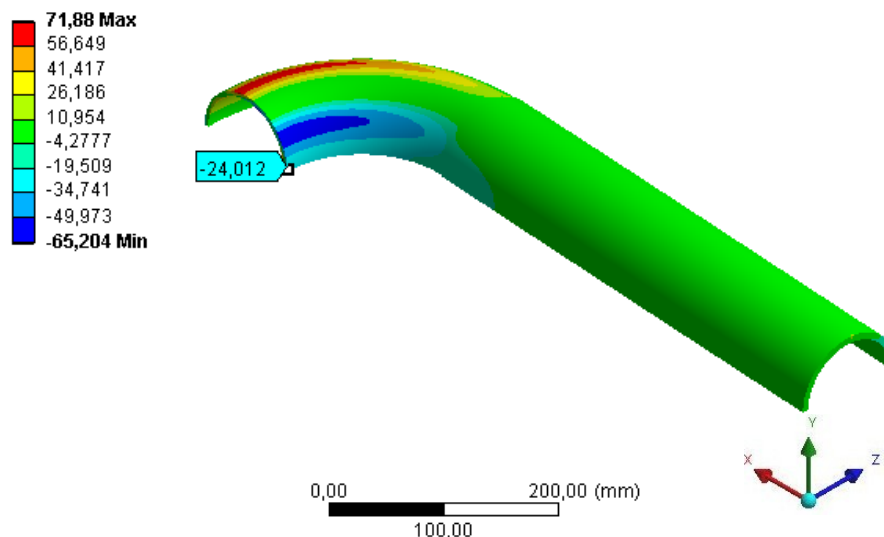
Obr. 5. 19 – Okrajové podmínky

Výsledky:

Hlavní napětí v podélném směru

D: cely-symetrie  
Middle Principal Stress  
Type: Middle Principal Stress - Top/Bottom  
Unit: MPa  
Time: 1  
7.5.2012 1:29

ANSYS  
v12.1

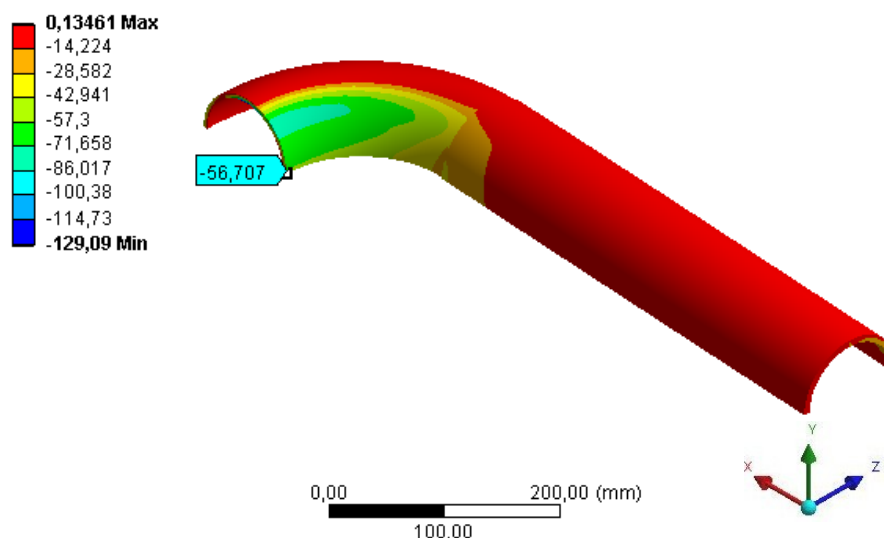


Obr. 5. 20 – První hlavní napětí

## Hlavní napětí v příčném směru

D: cely-symetrie  
Minimum Principal Stress  
Type: Minimum Principal Stress - Top/Bottom  
Unit: MPa  
Time: 1  
7.5.2012 1:29

ANSYS  
v12.1



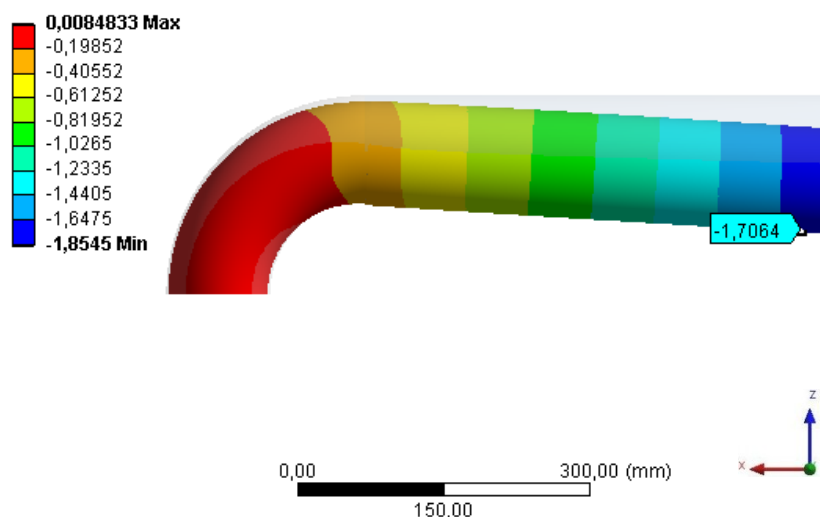
Obr. 5. 21 – Druhé hlavní napětí

Hlavní napětí v podélném směru v daném bodě odpovídá normálovému napětí v ose z, hlavní napětí v příčném směru v daném bodě odpovídá normálovému napětí v ose y.

## Deformaci ve směru osy z

D: Shell  
Directional Deformation  
Type: Directional Deformation ( Z Axis )  
Unit: mm  
Global Coordinate System  
Time: 1  
7.5.2012 21:07

ANSYS  
v12.1



Obr. 5. 22 - Průhyb

Zde opět znaménko mínus udává směr proti ose z a pro vyjádření celkového průhybu musíme uvažovat dvojnásobek zobrazené hodnoty.

Z Obr. 5.20 až Obr. 5.22 můžeme vyčíst velikost napětí a posuvu:

Typ elementu	Síla [N]	$\sigma_N$ [MPa]	$\sigma_{Mo}$ [MPa]	Posuv [mm]
Shell	1671,5	-24,012	-56,707	3,412

Tab. 13 - Vypočtené hodnoty

## 5.4 Shrnutí dosažených výsledků z numerického řešení

Pro přehlednost si zde shrneme všechny dosažené výsledky numerickým řešením.

Typ elementu	Počet elementů	Počet uzlů	Síla [N]	Napětí od složky [MPa]		Posuv [mm]
				normálové	momentové	
Beam	285	856	1671,5	-1,137	±27,951	0,825

Tab. 14 – Tabulka dosažených výsledků 1. část

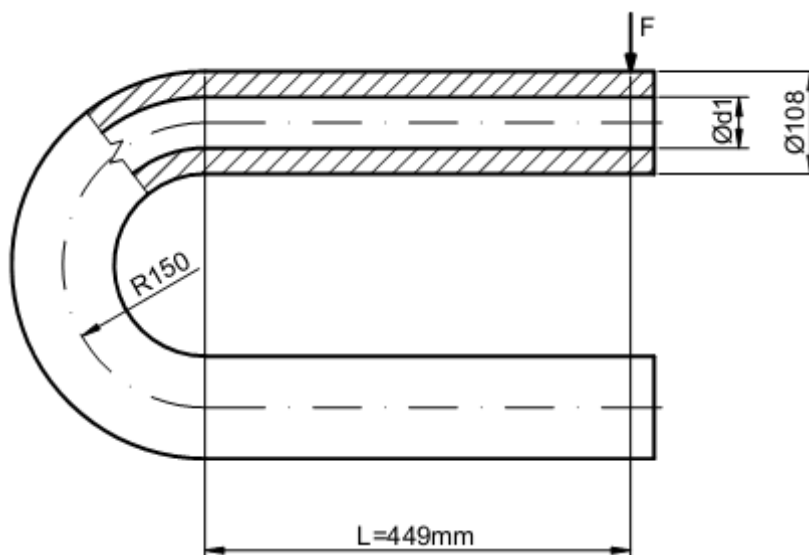
Typ elementu	Počet elementů	Počet uzlů	Síla [N]	Napětí ve směru [MPa]		Posuv [mm]
				podélném	příčném	
Solid	21140	97918	1671,5	-23,035	-55,107	3,356
Shell	12821	39034		-24,012	-56,707	3,412

Tab. 15 – Tabulka dosažených výsledků 2. část

Můžeme si všimnout, že výsledky dosažené při použití prvku Solid a Shell jsou téměř totožné. Obrovskou výhodou při použití skořepinových prvků je, že nám stačí výrazně menší počet elementů i při využití jemnější sítě. Model pomocí prvku Beam se nezdá vhodný pro řešení tohoto případu.

## 6 Srovnání MKP a analytického výpočtu pro model případu prutu

Pro zjištění závislosti tloušťky součásti na přesnosti (rozdílu) výsledků dosažených analytickou a numerickou metodou jsem v programu ANSYS 12.1 vymodeloval a analyticky přepočtl danou součást (Obr. 6. 1).



Obr. 6. 1 – Schéma součásti

Pro zjednodušení byl zvolen konstantní průřez po celé délce prutu. Budeme uvažovat tři případy:

- a) Vnitřní průměr  $d_1 = 0\text{mm}$  (plný průřez)
- b) Vnitřní průměr  $d_1 = 54\text{mm}$  (tloušťka stěny tedy bude  $27\text{mm}$ )
- c) Vnitřní průměr  $d_1 = 78\text{mm}$  (tloušťka stěny tedy bude  $15\text{mm}$ )

Analytická i numerická metoda byla v této bakalářské práci už řešena. Navíc pro téměř totožnou součást, proto zde bude řešení popsáno velice stručně. Při řešení tohoto případu bylo použito stejných vztahů, předpokladů i principů při modelování dle použitého typu prvku jako v kapitole 3. Analytické řešení křivého prutu a kapitole 5. Numerické řešení. Analytické výpočty jsou uvedeny v Příloze E-J.

## 6.1 Vypočtené hodnoty (analytickou a MKP metodou):

Tloušťka Metoda		Plný materiál	27 mm	15 mm
Tenký	Napětí [MPa]	-8,278	-8,879	
		7,913	8,392	10,74
	Posuv [mm]	0,191	0,205	0,266
Beam	Napětí [MPa]	-8,287	-8,889	-11,516
		7,923	8,403	10,754
	Posuv [mm]	0,239	0,257	0,335
Tlustý	Napětí [MPa]	-11,27	-11,833	-14,893
		6,106	6,639	8,687
	Posuv [mm]	0,237	0,255	0,33
Solid	Napětí [MPa]	-11,755	-13,205	-17,433
		5,92	5,912	5,558
	Posuv [mm]	0,254	0,28	0,472
Shell	Napětí [MPa]	-	-12,906	-17,2
			6,898	5,9
	Posuv [mm]		0,303	0,479

Tab. 16 – Dosažené výsledky

## 6.2 Shrnutí dosažených výsledků

Z Tab. 16 je patrné, že analytický výpočet pomocí teorie tenkých křivých prutů a MKP modelem pomocí prvku Beam je pro všechny případy téměř stejný. Tyto dvě metody jsou tedy založeny na stejné teorii. U výsledků tlustého křivého prutu a MKP modelem pomocí prvku Solid se dostáváme na stejné hodnoty pouze u plného průřezu. Se zmenšující se tloušťkou stěny se však tyto dvě metody rozcházejí, prvek Solid je tedy definován obecněji. Prvek Shell má se Solidovými prvky téměř totožné výsledky, je zde výhoda šetření elementů (po tloušťce).

## 7 Závěr

Všechny naměřené a vypočtené hodnoty jsou shrnuty v Tab. 17.

Řešení	Teorie / Metoda		$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	Posuv [mm]
Analytické	Tenkých křivých prutů		-29,029	-	0,591
	Tlustých křivých prutů		-36,031	-	0,751
Experimentální	Tenzometrická		-27	-58,5	4,313
Numerické	MKP	prvek Beam	-29,088	-	0,825
		prvek Solid	-23,035	-55,107	3,356
		prvek Shell	-24,012	-56,707	3,412

Tab. 17 – Souhrn vypočtených/naměřených hodnot

Předpoklad je takový, že při experimentu byly naměřeny skutečné hodnoty deformací, tedy nedošlo k žádné chybě v měření, a proto je budeme považovat za nejpřesnější. Ve vyšetřovaném místě jsme naměřili deformace v příčném směru o mnoho větší než ve směru podélném. Od toho se odvíjí i fakt, že hlavní napětí bude taktéž větší v příčném směru. To je dáno vlivem tloušťky stěny prutu. Se zmenšující se tloušťkou stěny roste velikost příčných deformací. Musíme tedy uvažovat rovinnou napjatost.

Zde ovšem může nastat problém při analytickém řešení pomocí teorie tenkých (slabě zakřivených) i tlustých (silně zakřivených) křivých prutů. První z nich, teorie tenkých křivých prutů vychází z předpokladu, že je možno ještě použít (resp. platí) vztahy pro přímé pruty. Zatímco teorie tlustých křivých prutů vychází ze vztahů pro křivé pruty, uvažuje se zde i přemístění neutrální roviny ve směru ke středu křivosti prutu. Nicméně obě tyto teorie uvažují pouze jednoosou napjatost ve směru normálovém na příčný řez. Je tedy patrné, jak z této úvahy, tak z výsledků např. v Tab. 17, že není vhodné řešit takovýto prut analyticky pomocí výše zmíněných teorií. Řešení tohoto případu by bylo možné pomocí teorie momentových skořepin, tato teorie je velmi složitá a nad rámec dosavadního studia.

Při numerickém řešení metodou konečných prvků dostáváme mnohem přijatelnější výsledky. Je zde sice jeden zádrhel v podobě řešení pomocí prvku Beam, ale to se dalo předpokládat. Prvek Beam je definován vztahy používanými při výpočtech pomocí teorie tenkých křivých prutů, podobnost dosažených výsledků tedy není náhodná. V programu ANSYS 12.1 je definována široká škála různých prvků využívající rozdílné teorie a postupy řešení.

Nejlépších výsledků se nám dostává při použití prvků Solid a Shell. Zde se dostáváme k odchylce mezi naměřenou a vypočtenou hodnotou napětí v podélném směru 14,7%, příčném směru 5,8% a u posuvu 22,2% pro prvek Solid. Pro prvek Shell je odchylka napětí

v podélném směru 11,1%, příčném směru 3,1% a u posuvu je nepřesnost 20,9%. Jelikož přesný materiál prutu neznáme, víme ovšem, že je z oceli, předpokládáme modul pružnosti v tahu  $E=2,1 \cdot 10^5 \text{MPa}$ . Tato hodnota je obecně platná pro oceli, avšak mohli bychom také použít hodnotu  $E=2 \cdot 10^5 \text{MPa}$ , díky které bychom se dostali blíže k naměřeným výsledkům.

	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	Posuv [mm]
Exp. měření	-25,71	-55,714	4,313
prvek Solid	-22,03	-55,15	3,6
prvek Shell	-23,5	-56,6	3,64

**Tab. 18 – Přepočet pro  $E=2 \cdot 10^5 \text{MPa}$**

Tím bylo dosaženo přesnějších výsledků. Pro prvek Solid je odchylka napětí v podélném směru 14,3%, příčném směru 1% a posuv 16,5%. Pro prvek Shell je odchylka napětí v podélném směru 8,6%, příčném směru 1,6% a posuv 15,6%. Odchytky vypočtených hodnot od hodnot skutečných jsou (mohou být) zpravidla způsobeny neznámým materiálem, geometrickými odchylkami (např. elipsovitě zploštění průřezu nebo střednice, které mohou vzniknout při ohýbání prutu), apod. Geometrické odchylky nebyly v modelech uvažovány a mají vliv na velikost chyby.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Kolektiv autorů:, Mechanika těles, Pružnost a pevnost I, skripta VUT Brno, 1992.
- [2] FUXA, J., ADÁMKOVÁ, L.: Sbíрка příkladů z pružnosti a pevnosti II. 1. část, skripta VŠB-TU Ostrava, 2007. 146 s. ISBN 978-80-248-1288-5.
- [3] FUXA, J., ADÁMKOVÁ, L.: Sbíрка příkladů z pružnosti a pevnosti II. 2. část, skripta VŠB-TU Ostrava, 2008. 139 s. ISBN 978-80-248-1933-4.
- [4] KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, K.: FEM - Principy a praxe metody konečných prvků. Brno: Computer Press, 1997.
- [5] LENERT, J.: Pružnost a pevnost I, Ostrava, skripta VŠB-TU Ostrava, 2005. 140 s. ISBN 80-248-0113-2.
- [6] LENERT, J.: Pružnost a pevnost II, Ostrava, skripta VŠB-TU Ostrava, 1998. 173 s. ISBN 80-7078-572-1.
- [7] LENERT, J.: Úvod do metody konečných prvků. 1. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 1999. 109 s. ISBN 80-7078-686-8.
- [8] MACURA, P.: Experimentální metody v pružnosti a plasticitě, Ostrava, skripta VŠB-TU Ostrava, 2001. 106 s. ISBN 80-7078-934-4.
- [9] MACURA, P.: Sbíрка úloh z experimentální pružnosti, Ostrava, skripta VŠB-TU Ostrava, 2008. 100 s. ISBN 978-80-248-1823-8.
- [10] Ansys Inc. Documentation for ANSYS Release 12.1. SAS IP, Inc., 2009.

### Internetové odkazy:

- [11] <http://www.hbm.cz>, 10.3.2012
- [12] <http://www.vishaypg.com>, 10.3.2012
- [13] <http://www.omegaeng.cz>, 10.3.2012



## SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A	-	Výkres - Křivý prut
Příloha B	-	Výkres - Přípravek pro snímač polohy - Plech
Příloha C	-	Výkres - Přípravek pro snímač polohy - Oko
Příloha D	-	Výkres - Přípravek - Rám
Příloha E	-	Analytický výpočet v programu Mathcad – Plný průřez – Tenký prut
Příloha F	-	Analytický výpočet v programu Mathcad – Plný průřez – Tlustý prut
Příloha G	-	Analytický výpočet v programu Mathcad – Tloušťka stěny 27mm – Tenký prut
Příloha H	-	Analytický výpočet v programu Mathcad – Tloušťka stěny 27mm – Tlustý prut
Příloha I	-	Analytický výpočet v programu Mathcad – Tloušťka stěny 15mm – Tenký prut
Příloha J	-	Analytický výpočet v programu Mathcad – Tloušťka stěny 15mm – Tlustý prut
Příloha K	-	Kalibrační list pro snímač polohy HS24
Příloha L	-	Kalibrační list pro snímač síly LCM305-5KN